

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

www.joom.org.mx

Ciudad de México. México. No. 3. Julio-Diciembre 2020

OBJETOS MATEMÁTICOS:

- **Notas sobre la prueba de suficiencia de una propiedad en $L(k; l_1, \dots, l_n)$.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia y Marcos Fajardo Rendón.

OBJETIVOS MATEMÁTICOS

- **Nuevo algoritmo para el cómputo de logaritmos $[0 < n < 1]$.**
Marcos Fajardo Rendón y Francisco Guillermo Herrera Armendia.
- **El corchete de Poisson y el conmutador de dos matrices cuadradas.**
Sealtiel Pichardo Jiménez.
- **Distancia entre dos puntos, sus dificultades por escala errónea y su aplicación en el teorema de Pitágoras.**
Efrain Valencia Calzadilla.
- **El desarrollo de la comprensión del aspecto matemático del logaritmo mediante la intuición y la axiomatización en los estudiantes de Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas al término de la aplicación de su programa educativo.**
Francisco Guillermo Herrera Armendia.
- **Breve deducción de las Fórmulas de Cardano a través del Polinomio de Taylor.**
Jaime William Flores Tecalco.

Francisco Guillermo Herrera Armendia
Editor en Jefe.
herrera@joom.org.mx

Marcos Fajardo Rendón
Editor Ejecutivo.
fajardo@joom.org.mx
Isaac Villavicencio Gómez
Coordinador Editorial.
villavicencio@joom.org.mx

CONSEJO PERIODISTA

Efraín Valencia Calzadilla
Sealtiel Pichardo Jiménez
Gregorio Montes de Oca Godínez
Areli Guadalupe Mateos Sanchez

COMITÉ CIENTÍFICO

Vitaliano Acevedo Silva
Marleny Hernández Escobar
Enrique Salazar Peña
María de Jesús Sentiés Nacaspac
Raciel Trejo Reséndiz

PRODUCCIÓN

Francisco Guillermo Herrera Armendia, Marcos Fajardo Rendón e Isaac Villavicencio Gómez

Webmaster
Marcos Fajardo Rendón

Web Designer
Juan Carlos Olivo Moya

JOURNAL DE OBJETOS Y OBJETIVOS MATEMÁTICOS, No. 3, Julio-Diciembre 2020, es una Publicación semestral editada por Francisco Guillermo Herrera Armendia con domicilio en Av. Zarzaparrillas 201 casa 12-A, Col. los Héroes Coacalco, Coacalco de Berriozabal, Estado de México, C.P. 55712, www.joom.org.mx, revistajoom@gmail.com.
Editor responsable: Francisco Guillermo Herrera Armendia.
Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2019-103016243300-203 otorgado por la Dirección de Reservas de Derechos del Instituto Nacional del Derecho de Autor, ISSN 2683-264X.
Responsable de la última actualización de este Número, Marcos Fajardo Rendón con domicilio Pedro Mz. 10 Bis Lt 12-A; La Purísima, Ecatepec, Estado de México, C.P. 5031, fecha de la última modificación 01 de julio de 2020.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos

Número 3.

Julio-Diciembre de 2020

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una revista semestral revisada por pares de Acceso Abierto que publica artículos de investigación originales, así como ensayos teóricos en todos los aspectos de los objetos de las matemáticas puras y aplicadas.

Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos es una literatura de Acceso Abierto bajo la BOAI (Budapest Open Access Initiative) y el modelo Open Access, lo que significa la disponibilidad de acceso libre mediante Internet al público, permitiendo a cualquier usuario su lectura, descarga, copia, distribución, impresión, almacenamiento, búsqueda, digitalización o vínculo a los textos completos de estos artículos para su rastreo e indexado; sin necesidad de compensación financiera, legal o algún otro tipo.

La presentación y disposición en conjunto de cada página de *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* núm. 3, julio-diciembre de 2020, son propiedad de sus respectivos autores. En cada artículo publicado los autores conservan los derechos de autoría de su trabajo, pero los lectores son libres de reutilizar el material siempre y cuando se den las citas correspondientes adecuadamente, no sea modificado ni usado con fines comerciales; ya que todos los artículos se publican bajo la licencia de atribución Creative Commons (CC BY-NC-ND).

Las opiniones expresadas por los autores en *Journal de Objetos y Objetivos Matemáticos* no necesariamente reflejan la postura de los editores de la publicación.

Contenido

Carta del Editor	3
OBJETOS MATEMÁTICOS	
Notas sobre la prueba de suficiencia de una propiedad en $L(k; l_1, \dots, l_n)$.	6
Notes on the sufficiency test of a property in $L(k; l_1, \dots, l_n)$. <i>Francisco Guillermo Herrera Armendia y Marcos Fajardo Rendón.</i>	
OBJETIVOS MATEMÁTICOS	
Nuevo algoritmo para el cómputo de logaritmos $[0 < n < 1]$.	8
New algorithm for compute logarithms in $[0 < n < 1]$. <i>Marcos Fajardo Rendón y Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	
El corchete de Poisson y el conmutador de dos matrices cuadradas.	15
The Poisson bracket and the commutator of two square matrices. <i>Sealtiel Pichardo Jiménez</i>	
Distancia entre dos puntos, sus dificultades por escala errónea y su aplicación en el teorema de Pitágoras.	17
Distance between two points, its difficulties due wrong scale and application in Pythagorean's theorem. <i>Efraín Valencia Calzadilla.</i>	
El desarrollo de la comprensión del aspecto matemático del logaritmo mediante la intuición y la axiomatización en los estudiantes de Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas al término de la aplicación de su programa educativo.	20
The creation of the understanding on mathematical aspect of the logarithm through intuition and axiomatization in students of Secondary Education with a major in Mathematics carrer at the end of their educational program application. <i>Francisco Guillermo Herrera Armendia.</i>	
Breve deducción de las Fórmulas de Cardano a través del Polinomio de Taylor.	37
Brief deduction of the Cardano's formulas through Taylor's Polynomial. <i>Jaime William Flores Tecalco.</i>	

CARTA DEL EDITOR

La publicación de este tercer número coincide con la terminación del año 2020 que será recordado por los acontecimientos extraordinarios que durante este periodo temporal ocurrieron, particularmente en el sector salud a nivel mundial y cuyo impacto fue estudiado con base en el objeto matemático denominado ecuaciones diferenciales autónomas, permitiendo un análisis con observaciones muy peculiares cuando los datos obtenidos se comparan con los datos de otros fenómenos de salud provocados por la misma causa en épocas anteriores. Sin embargo el impacto económico será sin duda muy difícil de superar. Esperamos que el quehacer económico se vaya recuperando pese a las dificultades que este proceso enfrente.

Como es nuestra característica, hacemos notar algunos pocos acontecimientos relevantes en el mundo del conocimiento matemático, en años cuya secuencia calendárica es congruente con la de 2020.

En 1733 Girolamo Sacheri publica su trascendental obre titulada “Euclides Vindicatus”, en la que inicia el estudio de aquellas geometrías planas con curvatura distinta de cero (en la geometría euclidiana plana la curvatura es igual a cero). Su trabajo consta de dos partes: la primera contiene 33 proposiciones con lemas, corolarios y escolios. La segunda parte la integran seis proposiciones y algunas también incluyen corolarios y escolios. Su obra inicia una perspectiva muy distinta del estudio de la geometría; con el paso de los años muchos otros autores continuarán esta obra, autores como Lobatchevsky, Bolyai, Riemann y sus propios seguidores. Él mismo no notó su gran descubrimiento y su influencia en el fundamento de lo que hoy conocemos como el estudio de otras geometrías.

El texto originalmente publicado en latín ese año ha tenido innumerables traducciones; una de las más precisas son las ediciones de 1920 y 1986 por la casa editorial Chelsea Publishing Company del famoso barrio del Bronx en Nueva York.

En 1891 la casa editora francesa Librairie de Firmin - Didot publica la trigésima primera edición de la magnífica obra titulada Elementos de Geometría de Adrián Maria Legendre, quien moderniza la obra Los Elementos de Euclides pues utiliza el lenguaje algebraico para la descripción de las proposiciones y además realiza propuestas de gran trascendencia en el estudio de esta rama del conocimiento. Por ejemplo incluye en su obra la Teoría de las Paralelas en las proposiciones 21 a 36 del Libro Primero (una aportación de suma importancia y hasta entonces no tratada). La proposición 7 del segundo Libro (El círculo y la medida de ángulos) enuncia: “*Dados tres puntos no alineados, trazar una circunferencia que pase por ellos*”. Este enunciado apareció en los contenidos iniciales del estudio de la geometría en el programa 2006 para educación secundaria en México y lamentablemente fue retirado de los programas siguientes, además de que nunca se dio el crédito de este planteamiento a su autor original, A. M. Legendre; este segundo Libro contiene 23 proposiciones. Al final escribe 18 problemas relacionados con los contenidos de los dos primeros libros. El tercer Libro trata sobre la Medida de los Polígonos y también sobre la Semejanza, contiene 36 proposiciones y 17 problemas. El cuarto Libro trata de los Polígonos regulares y la medida del círculo, con 19 proposiciones. El quinto Libro titulado El Plano y la Línea, El punto. Consideraciones sobre el Espacio con 43 proposiciones. El sexto libro titulado Poliedros lo forman 38 proposiciones e incluye el estudio de Simetrías. El Séptimo Libro titulado La esfera 28 proposiciones. El octavo Libro titulado Los Tres Cuerpos Redondos incluye 26 proposiciones. A continuación escribe 20 proposiciones a demostrarse sobre la geometría del espacio y 18 problemas. Finalmente incluye Apéndices para los Libros 3 al 7 y un apartado titulado Nociones

sobre las curvas más usuales, como la elipse, la hipérbola, la parábola y la hélice. Esta obra es en sí un novedoso método didáctico para la enseñanza de la geometría plana sin curvatura basada en un lenguaje algebraico sin descuidar el aspecto físico de las figuras tratadas. Es sin duda el ejemplo en el que se han basado los autores de libros de geometría posteriores a Legendre.

En 1936, el miércoles 29 de julio se funda oficialmente la Escuela Normal Superior de México, encargada de formar docentes para la entonces segunda enseñanza, es decir el trabajo frente a grupo con estudiantes de la escuela secundaria. La influencia, definitivamente heredada del pensamiento liberal francés instituido por Napoleón Bonaparte quien crea, a finales del siglo 18 dos instituciones dedicadas a la preparación de los jóvenes de cualquier estatus socioeconómico y con una filosofía ajena a la influencia religiosa y política propia de las universidades, nos referimos a la Escuela Normal Superior de París y al Instituto Politécnico francés.

Ese mismo año, justamente en Francia se llevó a cabo el tercer seminario anual (1935 – 1936) organizado por un grupo de jóvenes docentes egresados de la Escuela Normal Superior y que al paso del tiempo sentarían las bases de la matemática moderna, nos referimos al grupo Nicolás Bourbaki. Ese seminario se dedicó a la difusión de artículos de investigación relacionados con la Topología. En la ciudad de Oslo, Noruega se organizó el Congreso Internacional de Matemáticas con la particularidad que en ese evento se entrega por primera vez la Medalla Fields (semejante al Premio Nobel) pero en el área del conocimiento matemático. El jurado que dictaminó a los merecedores de la distinción lo integraron matemáticos de renombre en esa época: G. D. Birkhoff, Eli Cartan C. Carathéodory, F. Severi y T. Takagi, y los ganadores fueron J. Douglas e I. V. Ahlfors.

En 1970, entre el martes 1 y el jueves 10 de septiembre tuvo lugar en Nice, Francia el Congreso Internacional de Matemáticas con una asistencia de congresistas cuyo número rebasa los dos mil participantes, es decir fue un evento de gran relevancia para el conocimiento matemático. Tres figuras del grupo Bourbaki destacan en el evento: el presidente de la Unión Internacional de Matemáticos, Henri Cartan, Jean Leray presidente del Congreso y Jean Dieudonné, miembro del Comité Organizador. Entre los eventos del Congreso fue la entrega de cuatro medallas Fields: a) Alan Baker por sus contribuciones a la Teoría de los Números Trascendentales (iniciada por Liouville en 1884); b) Heisouké Hironaka, por su trabajo relacionado con la resolución de singularidades; c) Serge Novikov en reconocimiento a su colaboración en las áreas de Geometría y Topología Algebraica, particularmente en el cálculo del cobordismo unitario en el Anillo de Thom; d) John Thompson por sus contribuciones a los Grupos Finitos relacionados con los números primos (caso particular del número 2). Por parte de nuestro país asistieron al evento: Rubén Flores Espinoza, Félix Recillas, Emilio Lluís Riera y Marco Antonio Valencia Arvizu. Ese mismo año, en México se publica la primera edición de los textos de Matemáticas para la escuela secundaria en la que se incluye el estudio de la Teoría de Conjuntos, además de que la enseñanza se basa en el método axiomático, que se derivó a su vez de la propuesta basada en la modernización del pensamiento matemático y que mucho influyó el trabajo estructuralista del grupo Bourbaki (que también repercutió en movimientos como Oulipo en literatura, en la obra de Lévi-Strauss y Jean Piaget); los autores de esta obra (única hasta ese momento) fueron: Humberto Cárdenas Trigos, Emilio Lluís Riera por el Instituto de Matemáticas de la UNAM; Miguel Ángel Rafael Curiel Ariza, Fidel Peralta Corona, Cuauhtémoc Tavera Guerrero y Elías Villar Quijano

por la Escuela Normal Superior de México; Humberto López Pineda Flores por el Colegio Americano de México.

Esta propuesta educativa permaneció vigente (con algunos cambios) hasta el inicio de la última década del siglo pasado, a consecuencia de la debatible percepción que generó entre los educadores del último tercio del siglo anterior y las relaciones político – económicas que se fueron generando en años posteriores. Sin embargo, es un hecho que se perdió la oportunidad de preparar estudiantes de manera sólida en el conocimiento matemático básico.

Las colaboraciones incluidas en este tercer número se han distribuido de la siguiente manera:

En la sección de Objetos matemáticos está incluido un artículo que hace un breve análisis de la prueba de suficiencia basada en las matrices de incidencia descritas por H. Seifert de un objeto matemático característico de las variedades topológicas propuestas por Tietze denominado Espacios Lente.

En la sección Objetivos matemáticos se han incluido dos contribuciones; la primera es una contribución novedosa que describe el algoritmo para calcular en dispositivos digitales el logaritmo de números mayores que cero y menores que la unidad, ya que este procedimiento no lo realizan estos dispositivos; la segunda analiza el corchete de Poisson y su relación con el conmutador de dos matrices cuadradas.

Se cuenta con un artículo que analiza las dificultades en la enseñanza de la distancia entre dos puntos cuando se vincula con el teorema de Pitágoras y otro que realiza un análisis sobre el aprendizaje de los docentes en formación inicial respecto al tema de logaritmos con base en la intuición y la axiomatización.

El último artículo es una interesante colaboración que da cuenta de la deducción de las fórmulas de Cardano al vincularse con el Polinomio de Taylor.

Los editores.

Notas sobre la prueba de suficiencia de una propiedad en $L(k; l_1, \dots, l_n)$.

Francisco Guillermo Herrera Armendia y Marcos Fajardo Rendón.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- Los espacios Lente son objetos matemáticos que en forma tridimensional fueron introducidos por Heirich Tietze [1] y que representan un caso particular de los espacios topológicos representados por toroides sólidos y esferas. Tres autores realizaron contribuciones importantes; J. Alexander y por otro lado, H. Seifert y W. Threlfal de quienes ofrecemos comentarios relativos a la prueba de suficiencia para una propiedad característica de estos objetos matemáticos.

Palabras Clave- espacios lente; anillo cohomológico; matriz de incidencia.

Zusammenfassung- Linsenräume sind mathematische Objekte, die von Heirich Tietze [1] in dreidimensionaler Form eingeführt wurden und einen besonderen Fall von topologischen Räumen darstellen, die durch feste Toroide und Kugeln dargestellt werden. Drei Autoren haben wichtige Beiträge geleistet; J. Alexander und andererseits H. Seifert und W. Threlfal, von denen wir Kommentare zum Suffizienz-Test für eine charakteristische Eigenschaft dieser mathematischen Objekte abgeben.

Schlüsselwörter- linsenräume; kohomologiering; inzidenzmatrix.

Резюме- Пространства линз - это математические объекты, которые в трехмерной форме были введены Хейрихом Титце [1] и представляют собой частный случай топологических пространств, представленных полнотелыми тороидами и сферами. Три автора внесли важный вклад; Дж. Александер и, с другой стороны, Х. Зайферт и В. Трелфал, в отношении которых мы предлагаем комментарии относительно критерия достаточности для характерного свойства этих математических объектов.

Ключевые слова - линзовые пространства; коомологическое кольцо; матрица инцидентности.

Mathematical Subject Classification: 54-01.

I. LOS ESPACIOS LENTE

Sea $k \in \mathbb{Z}^+ \wedge l_1, \dots, l_n \in \mathbb{Z}^+$ de la forma $4l \pm 1 \vee 6l \pm 1$ [2] con respecto a k .

Además, $S^{2n+1} = \{(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$ represente a la esfera unitaria en el espacio lineal complejo $(n+1)$ -dimensional $\mathbb{C}^{n+1}$ y además define la rotación γ como la igualdad $\gamma(z_0, z_1, \dots, z_n) = (z_0^{2\pi i/k}, z_1^{2\pi l_1 i/k}, z_n^{2\pi l_n i/k})$.

Entonces, el espacio orbital está definido por la expresión $\frac{S^{2n+1}}{\mathbb{Z}_k} = L(k; l_1, \dots, l_n)$ [3].

Definición 1.-

La igualdad $\mathbb{Z}_k = \frac{\mathbb{Z}}{k\mathbb{Z}}$ interpretada como un grupo cíclico generado por γ , sean los espacios lente L .

Propiedad 1.-

L son una variedad diferenciable $(2n+1)$ -dimensional orientable [4].

Propiedad 2.-

L son infinitos. $L^\infty(k) = L(k; 1, \dots, 1, \dots)$ y definidos al observar que $n = \infty$; así, la esfera infinita S^∞ es entonces un k -doblez que envuelve el espacio de $L^\infty(k)$, con la condición siguiente: $L^\infty(k) = B_{\mathbb{Z}_k} = K(\mathbb{Z}_k, 1)$.

Su anillo cohomológico conserva las siguientes condiciones:

- 1) Para coeficientes integrales, $H^{2i+1}(L^\infty(k)) = 0, H^{2i}(L^\infty(k)) = \mathbb{Z}_k, (i > 0)$, de tal forma que el producto rango de generadores de grado $2i$ y $2j$ es un generador de grado $2(i+j)$.
- 2) Sea $k = pk' \mid p = 4n \pm 1 \vee 6n \pm 1, n \in \mathbb{Z}^+$. Se tienen dos casos:
 - i) $p \neq 2 \vee p = 2, \wedge k' = 2n \mid n \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow$
 $H^*(L^\infty(k); \mathbb{Z}_p) =$
 $\text{álgebra}_{\text{exterior}}(e_1) \otimes \mathbb{Z}_p[e_2]$
 - ii) $p = 2 \wedge k' = 2n + 1 \mid n \in \mathbb{Z}^+ \rightarrow$
 $H^*(L^\infty(k); \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2[e_1] \text{ (} e_1 \text{ es un elemento de grado } i \text{)}$

Nota 1: El álgebra exterior es sobre $\mathbb{Z}_p$. $\mathbb{Z}_p[\]$ indica el anillo polinomial sobre $\mathbb{Z}_p$.

Si dos espacios Lente $L(k; l_1, \dots, l_n)$ y $L(k'; l'_1, \dots, l'_n)$ son homomórficos, entonces $k = k'$ y existe un número entero primo m con respecto a k con la siguiente propiedad: $l_1, \dots, l_n \equiv \pm m^{n+1} l'_1, \dots, l'_n \pmod{k}$.

Para el caso $n = 1$ esta condición se mantiene sí y sólo si $L(k; l_1) \wedge L(k'; l'_1)$ poseen el mismo tipo homotópico

También la condición $k = k', \equiv \pm l'^{\pm 1} \pmod{k}$, se conserva sí y sólo si $L(k; l) \wedge L(k'; l')$ son homomórficos. Tal necesidad es consecuencia del hecho de que “la conjetura principal” es válida para 3-variedades combinatorias, y que la condición se mantiene si los poliedros $L(k; l) \wedge L(k'; l')$ poseen subdivisiones isomórficas.

Escolio [5] sobre la Prueba de Suficiencia para la condición $k = k', \equiv \pm l'^{\pm 1}, (\text{mod } k)$. a) Cálculo de grupos homólogos con base en las matrices de incidencia [6].

Definición 1.-

Sea $E_x^k \mid x = 1, 2, \dots, a^k; k = 0, 1, \dots, n$, una matriz simple. Además $0 \leq k \leq n - 1$.

Así se forman las relaciones de frontera:

$$\mathcal{R} E_k^{k+1} = \sum_{x=1}^k \mathcal{E}_{x\lambda}^k E_x^k \mid \lambda = 1, 2, \dots, a^{k+1} \quad (1).$$

La matriz: $\mathcal{E}_{x\lambda}^k = E^k \mid k = 0, 1, \dots, n - 1$, representa una tabla de doble entrada. La entrada izquierda contiene a los elementos simples orientados de dimensión k ; en la entrada superior están los elementos de dimensión $k + 1$ y en la intersección de la x -ésima fila con la λ -ésima columna está el coeficiente $\mathcal{E}_{x\lambda}^k$ y en que la matriz simple orientada E_x^k aparece en la cadena de aristas E_λ^{k+1} . Así, los valores de $\mathcal{E}_{x\lambda}^k$ son $-1, 0 + 1$, bajo dos condiciones:

- La matriz Simple orientada E_x^k posee una orientación inducida por E_k^{k+1} .
- No incide en absoluto en E_k^{k+1} .

II. PRUEBAS DE SUFICIENCIA

Definición 2.

E^k es una matriz de incidencia de dimensión k a consecuencia de la descomposición de este conjunto.

Corolario 1.- Las matrices de incidencia E^0 y E^1 de un conjunto simple formado por un único bi-conjunto simple $\mathfrak{G}^2$ poseen las siguientes orientaciones:

i) Para E^0

$$\begin{aligned} E_1^0 X E_1^1 &= 0 \\ E_1^0 X E_2^1 &= -1 \\ E_1^0 X E_3^1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_2^0 X E_1^1 &= +1 \\ E_2^0 X E_2^1 &= 0 \\ E_2^0 X E_3^1 &= +1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_3^0 X E_1^1 &= -1 \\ E_3^0 X E_2^1 &= +1 \\ E_3^0 X E_3^1 &= 0 \end{aligned}$$

ii) Para E^1 sobre E^2

$$\begin{aligned} E_1^1 X E^2 &= +1 \\ E_2^1 X E^2 &= +1 \\ E_3^1 X E^2 &= -1 \end{aligned}$$

Consecuencia: Este conjunto simple está determinado por las matrices de incidencia.

Nota 2: Con base en la consecuencia anterior, es posible determinar una relación muy específica. A manera de bosquejo intuitivo, se tiene un Plano P sobre el que está un triángulo equilátero cuyos lados son de $(k - 1)$ - dimensión de un simple conjunto E_x^k ; a partir de cada lado, pero ahora de dimensión $(k - 2)$ están los vértices E_x^k con la relación que establece que los vértices del triángulo son: E_1^0, E_2^0, E_3^0 ; los puntos medios de cada lado del triángulo son: E_1^1, E_2^1, E_3^1 ; el

centro del triángulo lo ocupa E^2 . Todos los puntos poseen la propiedad de transformación alrededor de E^2 .

Por lo tanto, todas las propiedades de este tipo de conjuntos simples deben ser consecuencia de las matrices de incidencia.

III. CONCLUSIONES

Los espacios Lente son una clase particular de los espacios topológicos, generalmente de tres variedades; una propiedad interesante es la relación: $E^1 X E^2$ de la que nos ocupamos, y que poseen propiedades particulares. Éstas permiten entender a estos objetos matemáticos como un grupo homológico.

REFERENCIAS

- [1] Tietze, H. (1908). On the Topological Invariants of multidimensional manifolds. Monatshefte für Mathematik und Physik 19. Recuperado de <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/haupt/Tietze1908.pdf>. 15 de diciembre de 2020.
- [2] Diedunoneé, J. (1992). Mathematics. The Music of Reason. Springer Verlag. Berlin.
- [3] Iyanaga, S. (Editor) (1968). Encyclopedic Dictionary of Mathematics. MIT Press. Cambridge.
- [4] Hu, S. T. (1969). Differentiable Manifolds. Holt, Rinehart and Winston Inc. N. Y.
- [5] Mashaal, M. (2006). Bourbaki. A secret society of Mathematicians. American Mathematical Society. Providence, R. I.
- [6] Seifert, H. Threlfall, W. (1947). Lehrbuch der Topologie. Chelsea Publishing Company. Bronx, N. Y.

Nuevo algoritmo para el cómputo de logaritmos $[0 < n < 1]$.

Marcos Fajardo Rendón y Francisco Guillermo Herrera Armendia.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
fajardoensm@gmail.com

Resumen- Se analiza el error de cálculo de logaritmos en valores comprendidos en el intervalo $[0 < n < 1]$; siendo recurrente en calculadoras, lenguajes de programación, sistemas operativos, apps y servicios en la nube; así mismo se propone un algoritmo complementario a los ya utilizados por estos sistemas que soluciona el problema.

Palabras Clave- métodos numéricos, logaritmos, cómputo, algoritmos, add-in.

Abstract- The error in calculation of logarithms in values comprised in interval $[0 < n < 1]$ is analyzed; being recurrent in calculators, programming languages, operating systems, apps and cloud services; Likewise a complementary algorithm is described to be used as add-in with already systems to solve the problem.

Keywords- numerical methods, logarithms, computation, algorithms, add-in.

Mathematical Subject Classification: 68Q25.

I. INTRODUCCIÓN

Los logaritmos son operaciones esenciales en matemáticas como los sistemas numéricos logarítmicos (LNS), de ingeniería como el procesamiento de señales digitales (DSP), de software como los gráficos 3D y científicas como la escala de Richter, equilibrio de reacciones química, medición de astros.

El trabajo propuesto surge de la importante observación y a modo de *-justificada-* crítica a la tecnología, el co-autor del presente artículo Francisco Guillermo Herrera Armendia ha venido indicando en sus cátedras en la Escuela Normal Superior de México respecto a un error que ha observado desde primitivas calculadoras hasta modernos sistemas en la nube que no son capaces de brindar el correcto logaritmo de valores en el intervalo $[0 < n < 1]$ de acuerdo a los principios establecidos por Napier en *Mirifici logarithmorum canonis constructi*[1].

El problema se vuelve caótico cuando se quieren realizar operaciones con logaritmos que es un objeto matemático al requerir de las partes separadas de el intervalo descrito como el caso de la $\sqrt[12]{0.2}$ para su correcta comprensión[2].

El presente trabajo analiza el error heredado de cálculo en computadoras *-mal llamadas ordenadores por los españoles y ordinateur por los franceses debido a la semejanza primitiva con su dios-* a la hora de computar $[0 < n < 1]$ por un algoritmo que olvidó contemplar la regla del intervalo anterior y en el proceso pierde la constante de proporción[1] logarítmica.

Así mismo se propone un algoritmo que a modo de complemento (*add-in*) permite solucionar el problema de cómputo.

Por último se compara el algoritmo con los resultados obtenidos en distintos sistemas computacionales, sitios y arquitecturas.

II. LOGARITMACIÓN

En la actualidad, los logaritmos son funciones matemáticas, y fueron creadas por John Napier[1] en el siglo XVII que permiten simplificar los cálculos. El proceso de logaritmación es la operación inversa a la exponenciación de la base del logaritmo, de modo que para[1]:

$$\forall x | x \in \mathbb{R}; \log_b n = x \leftrightarrow b^x = n; b > 0, \neq 1 \quad (1)$$

la base b de los logaritmos es 10.

Conocidos como Logaritmos comunes, propuestos a Napier por Briggs.

Las propiedades de los logaritmos indican que:

$$\log_b b = 1; b^1 = b \quad (2)$$

$$\log_b 1 = 0; b^0 = 1 \quad (3)$$

Así mismo para el caso particular importante del presente artículo:

$$\text{Sea } c \in \mathbb{Z}^-; m \in \mathbb{R}^+. \forall x \in \mathbb{R}^+ | 0 < x < 1; \log_b x = c, m. \quad (4)$$

Siendo en éste caso una función logarítmica de tipo creciente descrita en $(-\infty, +\infty)$ la cual si bien puede ser tratada como tal; a la hora de su cálculo debe ser separada la parte *característica*[1] (entera) cuyo comportamiento es propio debido a su valor posicional de la parte *mantisa*[2] (decimal) que debe mantenerse como una constante de proporción[1] del proceso de logaritmación de $\forall n$ independientemente de la posición de su punto decimal.

Los logaritmos negativos no se encuentran en $\mathbb{R}$, debido a que un exponente donde $\forall n! \quad b^n > 0 \quad \nexists$ para $b^n = x|x < 0$; sin embargo disponible en $\mathbb{C}$ [1].

Por lo que para ejemplificar el presente artículo y pruebas se utilizará el logaritmo del número 582; es decir 2.7649229846498886 donde 2 es la característica y 0.7649229846498886 la mantisa.

Analógicamente como se describió anteriormente se puede obtener la Tabla I en donde se aprecia que la mantisa es una constante de proporcionalidad[1] cuyo valor es independiente del valor o signo de la característica que es una variable entera; por lo que para los últimos tres valores de la característica negativa que cumplen el estudio $[0 < n < 1]$ se obtienen siempre la misma proporción de los valores anteriores.

Tabla I. La Mantisa como una constante de la logaritmación.

Valor	Característica	Mantisa
$\log_{10} 582$	2	.7649229846498886
$\log_{10} 58.2$	1	.7649229846498886
$\log_{10} 5.82$	0	.7649229846498886
$\log_{10} 0.582$	-1	.7649229846498886
$\log_{10} 0.0582$	-2	.7649229846498886
$\log_{10} 0.00582$	-3	.7649229846498886

Ahora bien, si se “combinan” ambos registros de la tabla anterior mediante una suma aritmética; proceso que realizan los sistemas computacionales para cumplir con (1) se obtiene un número entero con una parte decimal que brinda valores erróneos que no cumplen con la constante de proporcionalidad y la separación Neperiana de característica y mantisa[1]; siendo esta combinación errónea para no manejar dos resultados el problema que presentan actualmente los sistemas computacionales como se describe en la Tabla II.

Tabla II. Comparación del valor computado mediante la errónea suma de la característica y la mantisa contra el valor calculado como la combinación de dos valores.

Valor	Valor Combinado (Característica + Mantisa)	Valor Calculado con constante Mantisa
$\log_{10} 582$	2.76492298464988	2.76492298464988
$\log_{10} 58.2$	1.76492298464988	1.76492298464988
$\log_{10} 5.82$	0.76492298464988	0.76492298464988
$\log_{10} 0.582$	-0.2350770153501	-1.7649229846498
$\log_{10} 0.0582$	-1.2350770153501	-2.7649229846498
$\log_{10} 0.00582$	-2.2350770153501	-3.7649229846498

El problema del valor mal combinado anteriormente descrito no sólo radica en que rompe la estructura proporcional; si no que éste problema se puede observar como una diferencia creciente a partir de los valores indicados en el artículo como un valor único; si no que es prácticamente imposible a través de los resultados combinados erróneamente obtener tanto la mantisa como la característica original.

Por otro lado mantener los valores de cálculo separados con la Mantisa como constante permite sumarlas y obtener un valor combinado sin perder el original cumpliendo con la anterior definición en (1) ya que el sistema computacional cambia (1) al definir a n como el resultado de la operación aritmética *mantisa + constante* en todos los casos:

$$\log_b n = b^x = n \mid n = (m + c) \quad (5)$$

III. TEORÍA ATÓMICA COMPUTACIONAL

La precisión de un algoritmo es medible mediante teoría de las medidas en σ -álgebras para los conjuntos donde su medida interior y exterior son definidas como $\forall A_x \subset X$ Dadas por:

Una medida exterior en Ω es una función de conjunto $\mu^* : P(\Omega) \rightarrow [0, \infty] \mid \mu^*(\emptyset) = 0$; $A \subset B \rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$; $B_n = (A \subset \Omega, B \subset \Omega \dots) \rightarrow \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n)$ [3] siendo:

$$\mu^*(A) = \max\{\mu(B) : B \in A, B \subset A\}, \mu_*(A) = \min\{\mu(B) : B \in A, B \supset A\} \quad (6)$$

Donde el conjunto $A = \emptyset$ es despreciable si $\mu^*(A) = 0$; por lo que el complemento $X \setminus A$ es un conjunto de medición completa que cumple $x \notin A$ para casi todo x . Sean los conjuntos:

$$A, B \mid A, B \subset X; A \approx B \leftrightarrow [x \in A; x \in B] \quad (7)$$

Dado $A \setminus B$; $B \setminus A$ despreciables; para las funciones: $f, g: X \rightarrow Y$; $X \approx Y$ si son iguales en donde sea.

La equivalencia $\approx$ entre las clases de conjuntos A son definidas por la álgebra de (X, A, μ) .

Las clases equivalentes de integrables raíces de valores complejos de funciones medibles en X que se definen por los espacios escalares de Hilbert en un $L^2(X, A, \mu)$; siendo isomórfico a L^2 para algunas condiciones (T.)

El espacio $L^2(S, \Sigma, \mu)$ de las funciones de valores complejos $x(s)$ es definida sobre un conjunto S con total medición positiva con un μ dado en una σ -Álgebra de subconjuntos Σ de S , la cual es medible y tiene un integrable módulo raíz dado por [4]:

$$(x(s), y(s)) = \int S x(s) \overline{y(s)} d\mu(s). \quad (8)$$

Sea $\{x\}$ medible para todo $x \in X$.

Para los conjuntos entonces se tiene que:

$$((X, A, \mu) ; \mu) \rightarrow \text{continuo} \leftrightarrow \mu(\{x\}) = 0 \mid \forall x \in X. \quad (9)$$

$X \approx S \rightarrow \text{discreto} \mid S = f: N \rightarrow S; n \mapsto s = f(n)$

Es decir; S es una función inyectiva que describe un conjunto numerable y considerado infinito si fuera sobreyectivo y por consecuencia biyectivo.

Un espacio discreto no puede estar libre de átomos excepto en $\mu(X) = 0$; sin embargo un espacio puramente atómico puede ser continuo[4].

Sean (X_1, A_1, μ_1) , (X_2, A_2, μ_2) los espacios medibles.

La preservación de la medición[5] se define como una función f :

$$X_1 \rightarrow X_2 \leftrightarrow \forall A_2 \in A_2 \quad (10)$$

La imagen inversa $A1=f^{-1}(A2)$ satisface $A1 \in A1$, $\mu1(A1)=\mu2(A2) \mid f \in \text{álgebra de medidas de } (X2, A2, \mu2)$.

De modo que la clase de equivalencia de $A2$ se convierte en la clase de equivalencia de $A1 = f^{-1}(A2)$.

Un espacio de medida bien definido es el producto de espacios de medida finitos[4].

Por otro lado un espacio probabilístico es un espacio medido por $(X, A, \mu) \mid \mu(X) = 1$ [5].

IV. FUNCIÓN ULP

Un número finito de punto flotante es un número en el cual existe al menos una representación (M, e) definida por [6]:

$$x = M \cdot \beta^{e-p+1} \quad (6) \quad (11)$$

Siendo el *quantum* la representación de x [7]:

$$\beta^{e-p+1} \quad (12)$$

$q = e - p + 1$ es el exponente *quantum* (13)

Donde:

$$M \in \mathbb{Z} \leq \beta p - 1 \mid \quad (14)$$

Es denominado el significado integral de la representación de x .

El exponente de representación de x se define como:

$$e \in \mathbb{Z} \mid e_{\min} \leq e \leq e_{\max} \quad (15)$$

Cuando se requiere expresar los errores de funciones quasiaatómicas aritméticas para un análisis numérico es más preciso expresar los errores de acuerdo con el peso -como importancia significativa en la medición- que tiene la unidad en el último lugar o de acuerdo con lo que William Kahan en 1960 define como *ULP (Unit in the Last Place)*:

ULP(x) is the gap between the two floating-point numbers nearest to x, even if x is one of them[8].

Lo anterior se encuentra en términos a la noción de la propiedad *densidad desde la perspectiva de teoría de conjuntos o un conjunto denso* que algunos malos didactas han desvirtuado en términos tales como *hoyos*.

Cuando x es un número de punto flotante excepto potencia base; $ULP(x)$ será igual al *quantum* de x .

Lo anterior permite describir el redondeo correcto más cercano o de menos de x *ULP*.

Harrison [9] define *ULP* como:

the distance between the closest straddling floating-point numbers a and b (i.e., those with $a \leq x \leq b$ and $a \neq b$), assuming that the exponent range is not upper-bounded

Goldberg [10] con 12 propiedades da una definición con extensión $\mathbb{R}$ por:

$$\text{If } x \in [\beta^e, \beta^{e+1}), \text{ then } ULP(x) = \beta^{\max(e, e_{\min})-p+1} \quad (16)$$

Donde x es un número de punto flotante con un *quantum* de x dado que $|x| < \Omega = (\beta - \beta^{l-p}) \cdot \beta^{e_{\max}}$ de acuerdo a la propiedad densidad anteriormente definida.

El cálculo anteriormente descrito es realizado por microinstrucciones de hardware integradas en cualquier sistema de cómputo, los cuáles pueden calcular funciones trascendentales entre 0.5 y 1 *ULP*. Solo unas pocas bibliotecas los calculan dentro de 0.5 *ULP* debido al fabricante de tablas [11].

V. CÓMPUTO

Actualmente el cómputo infinitesimal depende del número de procesos requeridos para el cálculo de una operación dada, la precisión del error y el tipo de variable para el cálculo que repercute en la magnitud del número; así mismo se debe evaluar la velocidad y región de convergencia tomando en cuenta las características del sistema como flops, capacidad de almacenamiento en los registros de la Arithmetic Logic Unit[12], bus y capacidad de niveles de cache entre otras características de su arquitectura[13] mediante las normas del Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) 754 y actualmente IEEE/ISO/IEC 60559-2020 [14].

El objetivo del programador de una DLL(Dynamic-Link Library) matemática es encontrar una aproximación óptima que logre la precisión deseada con la menor cantidad de cálculos posibles. Las series de Taylor suelen ser una mala elección porque se necesitan demasiados términos para lograr la precisión deseada al utilizar a un $n \in \mathbb{R} \mid 0 < n < 2$ cumple:

$$\ln(n) = (n-1) - \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-1)^3}{3} + \dots \quad (17)$$

Las técnicas para mejorar lo anterior son reducir el rango de todos los $\mathbb{R}$ a una región muy pequeña y luego usar alguna aproximación óptima que produce otra aproximación precisa de la función deseada en este rango como los polinomios o polinomios racionales; ya que para lograrlo sólo se requieren los coeficientes polinomiales utilizando técnicas de optimización como el algoritmo moderno de punto flotante de hardware Remez Evgeny Yakovlevich[15]; el cual requiere que el resultado de las instrucciones de operación aritmética y del conjunto Fused Multiply-Add (FMA) en Intel y AMD[13] del sistema computacional estén correctamente redondeadas a 0.5 *ULP*[8] del resultado matemáticamente exacto.

El algoritmo iterativo de Remez Exchange[15] encuentra aproximaciones simples a funciones en un espacio de Chebyshev[16]; siendo el mejor en modo minimax en la

norma uniforme L_∞ iniciando con la función a la que se aspira obtener aproximada al conjunto x de $n+2$, donde los puntos muestrales son: $x_1, x_2, \dots, x_{n+2}$ del intervalo de aproximación, el cuál tiende a los extremos del polinomio[16] mapeados linealmente al intervalo donde $b_0, b_1 \dots b_n$ y E son desconocidos y descrito como[16]:

$$b_0 + b_1 x_i + b_n x_i^n + (-1)^i E = f(x_i) \mid i=1, 2 \dots n+2 \quad (18)$$

Donde b_i son los coeficientes para una forma polinomial P_n para encontrar el conjunto M de puntos de error máximo local $|P_n(x) - f(x)|$.

Si los errores en cada $m \in M$ son de igual magnitud y signo alterno, P_n es la aproximación minimax del polinomio; si no se reemplaza X con M y se repiten los pasos anteriores.

De acuerdo con la definición de John Harrison[9] se deduce que entonces que la propiedad implica que la distancia entre el resultado redondeado y el resultado matemáticamente exacto es minimizado; bastando cumplir en los casos intermedios con dos números de punto flotante consecutivos.

Para el logaritmo natural se reduce el rango representando los $\forall \mathbb{R}$ como una mantisa y un exponente dados por:

$$x = m \cdot 2^p \mid p \in \mathbb{Z}; 1 \leq m \leq 2 \text{ y } 2 \quad (19)$$

Así $\log(x) = \log(m) + p \cdot \log$; Siendo $p \cdot \log$ el producto por una constante, reduciendo el problema a encontrar el logaritmo de un número $1 \leq m \leq 2$ o $\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Así mismo se puede generar una reducción extra del rango ya logarítmicamente al encontrarse $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$ mediante un polinomio racional 2º al 3er orden.

Cuando se utilizan microcontroladores o FPGAs que no incluyen la tabla de logaritmos se utiliza el algoritmo de Volder o CORDIC (COordinate Rotation DIgital Computer)[17] optimizado por John Stephen Walther; el cuál es un método que computa dígito por dígito mediante adiciones y sustracciones iterativas por desplazamientos de bits (bitshift) y tablas.

El algoritmo realiza sumas infinitas[14] que dan los valores de los logaritmos a modo de que para encontrar el logaritmo de n_b se realiza:

$$\log_b(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (20)$$

$$\log_b \frac{n+1}{n-1} = \frac{2}{n} + \frac{2}{(n+2)^n} + \frac{2}{(n+2)^n} + \dots \quad (21)$$

Como se puede apreciar los términos tienden a épsilon en función de un x pequeño y un n grande.

Para su aproximación se realizan iteraciones siendo el número de términos utilizados en función del valor de x con u ULP[8] definido por sus iteraciones.

El segundo algoritmo aproxima iterativamente el logaritmo de un número dado mediante su raíz cuadrada y utilizar mediante la definición (1).

De modo que cada cálculo de raíz ha segmentado la longitud del $[l_1 < \log_b x < l_2]$

Teniendo después de i interacciones un $[\frac{1}{2^i}] \dots [\frac{1}{k^i}]$ el algoritmo es:

$$b^0_1 = l_1 \leq x; \quad (22)$$

$$b^{\frac{n-1}{d=1}}_2 = l_2 \leq x;$$

$$b^{\frac{n}{d}}_i = l_i \leq x \mid b^{\frac{l_{i-1} < x \rightarrow n=2n+1; l_{i-1} > x \rightarrow n=2n-1}{d=2d}} = l_{i+3} \leq x$$

$$b^{\frac{n}{d}}_i = l_i \cong x; l_i \rightarrow x$$

$$\log_b x = \frac{n}{d_i} \mid l_i \cong x$$

$$\forall b_i^n = \sqrt{(n_{i-1} > x) \cdot (n_{i-1} < x)}$$

VI. DESCRIPCIÓN DEL ALGORITMO

Para la propuesta de cálculo de logaritmo se parte de la técnica de precisión de cómputo de fracciones continuas para el ULP[8] definida por la expansión de una función $f(x)$ de modo:

$$f(x) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots}} \mid (a; b) \in f(x) \quad (23)$$

De modo que para el logaritmo queda de la forma:

$$\log x = \frac{x-1}{1 + \frac{1^2(x-1)}{2 + \frac{1^2(x-1)}{3 + \dots}}} \quad (24)$$

Siendo estas series un número finito de acuerdo con los términos utilizados para aproximarse a la función enésima mediante:

$$f_n(x) = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_1}{b_2 + \dots}} \quad (25)$$

Para computar $f_n(x)$ por un sistema se mantiene de forma iterativa las adiciones y divisiones mediante la estructura de la expansión descrita en (1) mediante el cálculo secuencial de la aproximación n -ésima que puede ser expresada como una suma:

$$f_n(x) = b_0 + \sum_{i=1}^n \rho_1 \rho_2 \dots \rho_i \quad (26)$$

Donde:

$$r_i = \frac{a_i}{b_{i-1}b_i}; 1+\rho_1 = \frac{1}{1+r_i(1-\rho_{i-1})} \quad (27)$$

$$\rho_i = \frac{a_1}{b_1}; 1+\rho_2 = \frac{1}{1+r_2} \quad (28)$$

El algoritmo utiliza las variables *base* (B), *número* (N) y resultado del *logaritmo* (L) computado formado por la suma aritmética de la mantisa (M) y la característica (Car). Para la precisión anteriormente descrita utiliza p .

Partiendo de las condiciones automatizadas utilizando (1),(2),(3) y (4) se obtiene:

$$\text{Log}_b N = \{0\} \mid N = 0; \text{ ya que } \nexists X \mid b^X = 0 \quad (30)$$

$$\forall \text{Log}_b - N = \{0\}; \text{ ya que: } \forall X_b^{-N} = X_b^{\frac{1}{N}} \mid N \in \mathbb{R}^+; \text{ excepto si } N \in \mathbb{C}. \quad (31)$$

$$\forall \text{Log}_b N = \{0\} \mid b < 0; \text{ ya que: } \nexists 0^X \quad (32)$$

$$\forall \text{Log}_b N = \{0\} \mid b \neq 1; \text{ ya que: } 1^x = 1 \quad (33)$$

Para el caso contrario:

$$\forall \text{Log}_b N = x \quad (34)$$

Generalizando el modelo como:

$$\text{Log}_b N \begin{cases} \text{Log}_b N = \{0\}, & N = 0; \nexists X \mid b^X = 0 \\ \forall \text{Log}_b - N = \{0\}, \forall X_b^{-N} = X_b^{\frac{1}{N}} \mid N \in \mathbb{R}^+; \\ & \text{excepto } N \in \mathbb{C}. \\ \forall \text{Log}_b N = \{0\}, & b < 0; \text{ ya que: } \nexists 0^X \\ \forall \text{Log}_b N = \{0\}, & b \neq 1; \text{ ya que: } 1^x = 1 \\ \text{Log}_b N = x \end{cases} \quad (35)$$

Como se describió anteriormente y por[1] el Logaritmo estará formado por la característica y la mantisa como valores independientes y concatenados por lo que $\forall \text{Log}_b N = x$ como la unión:

$$x = C \cup M \quad (36)$$

O como concatenación:

$$x = C \& M \quad (37)$$

Utilizando (34) y (36):

$$N \geq 1 \begin{cases} C = -1, & N < b \\ C = i, \quad i \begin{cases} N = \frac{N}{b_{i+1}}, & N < b \\ i = i, & N < b \end{cases} & N > b \end{cases} \quad (38)$$

$$0 < N < 1 \begin{cases} C = -1, & b > N \geq 1 \\ C = i \cdot -1, i \begin{cases} N = N \cdot b_{i+1}, b < N < 1 \\ i = i. & b > N \geq 1 \end{cases} & b < N < 1 \end{cases} \quad (39)$$

La precisión deseada de la misma se encuentra dada por p para una ULP[8] establecida. La mantisa como constante de proporción[1] se obtiene independientemente de (38) o (39) mediante:

$$M \begin{cases} M = M + \frac{i}{10}; N^b, \quad p_i \begin{cases} N = \frac{N}{b_{i+1}}, & N > b \\ p_{i+1}, & N < b \end{cases} & p_i < p \\ M = M, & p_i = p \end{cases} \quad (40)$$

Utilizando (36) se puede realizar la suma $x = C + M$ para cumplir con (1):

$$\forall x \mid x \in \mathbb{R}; \text{Log}_b n = x \leftrightarrow b^x = n; b > 0, \neq 1; x = C \cup M \rightarrow x = C + M \quad (41)$$

Utilizando (35) se desarrolla el diagrama de la figura 1.

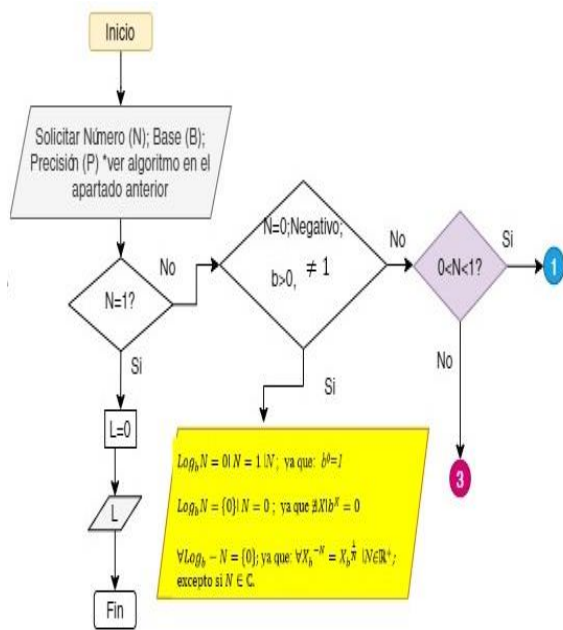


Fig. 1. Algoritmo parte 1.

Excluyendo de procesamiento las cláusulas y definidas las variables anteriores el algoritmo parte de la evaluación el caso particular $0 < n < 1$ para obtener la característica.

Si no cumple con éste el algoritmo brinca a la sección 3 usando (38) en donde evalúa si en un principio el número $n < b$ para colocar en la variable característica la iteración 0; de lo contrario divide n/b hasta que $n \geq b$ colocando el número de iteración en la característica para ir a la sección común 2 encargada de la mantisa como se describe en la figura 2.

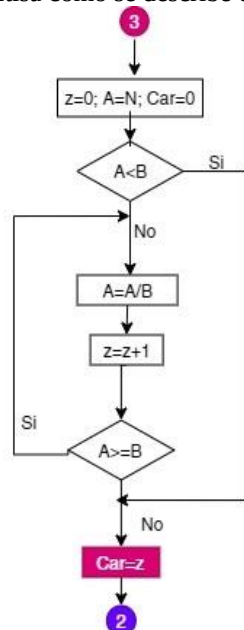


Fig. 2. Algoritmo sección 3.

Si cumple con el caso particular $0 < n < 1$ el algoritmo va a la sección 1 usando (39) en donde es multiplicado por la base de forma iterativa hasta que $n > b \geq 1$ colocando el valor de la iteración multiplicada por -1 en la variable característica; ya que en éste caso particular la característica siempre es negativa; para ir a la sección común 2 encargada de la mantisa, como se describe en la figura 3.

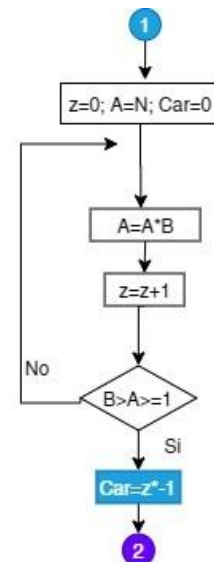


Fig. 3. Algoritmo sección 1.

Con la característica calculada anteriormente por la sección 1 o 3 se calcula por (40) comenzando con el reseteo de sus variables y mediante elevar a la potencia indicada por la base el valor A; heredado de la sección característica 1 o 3, compara si es mayor a la base; si lo es divide el valor obtenido entre la base iterando z veces en un ciclo hasta que el cociente sea menor a la base, obteniendo el n-ésimo valor posicional de la *mantisa* al adicionar a ésta $\frac{z}{10}$; repitiendo los pasos anteriormente descritos el número de veces mediante la precisión de dígitos indicada por la ULP seleccionada[8], para finalmente realizar una correcta combinación mediante la concatenación entre la mantisa obtenida y la característica, a diferencia del cómputo tradicional que realizaba la suma. El algoritmo integra además la capacidad de precisión ULP[8], pudiendo utilizar la propia del algoritmo clásico indicado y la posibilidad al sistema computacional de precisión por la iteración finita definida por la variable p. La sección 2 encargada del cálculo de la mantisa se describe en la figura 4.

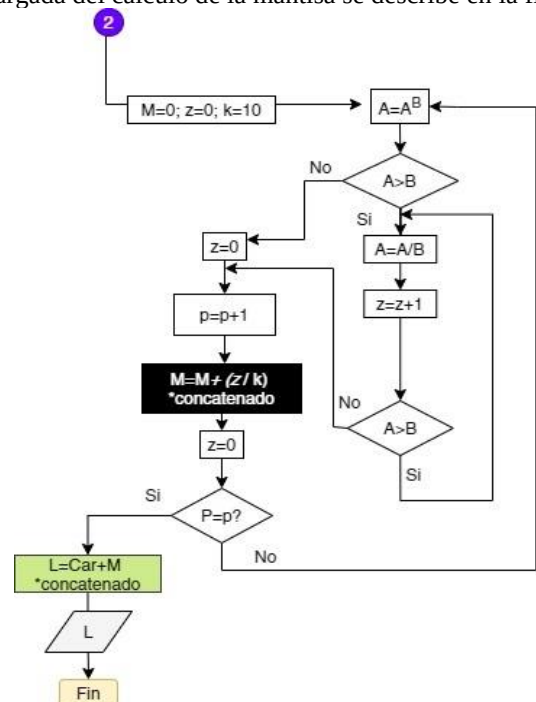


Fig. 4. Algoritmo sección 2.

VII. IMPLEMENTACIÓN Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS.

Para poder apreciar el algoritmo anteriormente descrito se codificó mediante un script add-on al algoritmo computacional disponible en el sitio web <https://www.mathensm.org.mx/logaritmo/index.html> del cuerpo académico PRODEP ENSMEX-CA-2 para que pudiera ser apreciado por cualquier dispositivo local o móvil conectado a internet.

En la Tabla III se indican los resultados obtenidos del cómputo del 5° valor de la Tabla I: $\log_{10} 0.0582$ en distintos sistemas computacionales.

Tabla III. Comparación del valor obtenido por el algoritmo y distintos sistemas computacionales y lenguajes.

Sistema	Valor Calculado
Fajardo – Herrera	-2.7649229846498884
Visual C# .NET / Mono	-1.2350770153501114
Java	-1.2350770153501114
Javascript	-1.2350770153501114
R	-1.2350770153501114
Matlab	-1.2350770153501114
Microsoft Windows 10 (calc.exe)	-1.2350770153501115...
https://es.symbolab.com	-1.23507...
https://mathsolver.microsoft.com	≈ -1.235077015
https://www.geogebra.org	-1.2350770153501
https://www.mathway.com/	≈ -1.23507701
https://www.calculator.net	-1.2350770154
Casio fx-83/85GTX y fx-991EX	-1.2350770153501115...
Linux openSUSE (calculadora)	-1.2350770153501115...
Android 11 (calculadora)	-1.2350770153501115...
macOS Catalina (calculadora)	-1.2350770153501115...
iOS / iPadOS 14.3 (calculadora)	-1.2350770153501115...

VIII. CONCLUSIONES

El algoritmo para el cómputo de logaritmos $[0 < n < 1]$ Fajardo-Herrera (35)(36)(37)(38)(39)(40)(41) permitió encontrar los valores correctos de acuerdo a los principios Neperianos[1] separando los valores característica y mantisa como dos registros separados manteniendo en todos los casos la constante de proporción (34)[1].

El algoritmo permite a los valores correctos de acuerdo a los principios Neperianos[1] ser concatenados (36)(37) en uno sólo sin perder la correcta interpretación[1] con una ULP[8] configurable(34) mediante p .

El algoritmo permite a los valores correctos de acuerdo a los principios Neperianos[1] ser sumados en uno solo (41) para cumplir con la definición (1).

El error heredado en todos los algoritmos utilizados por los sistemas computacionales descritos en el artículo[12][13][17] parten de que no concatenan (37) valores independientes y utilizan un algoritmo que no evalúa la característica y mantisa por separado al utilizar distintas series [17][18][19][20][21][22].

Se programó un sitio web utilizando el algoritmo (35)(37)(38)(39)(40)(41) como complemento en donde el usuario puede calcular el logaritmo de un número en distintas bases obteniendo la mantisa y característica como valores

separados y compararlo con la función Log computacional clásica con una ULP[8] de 16 fija por programa.

REFERENCIAS

- [1] Napier, J.: Mirifici logarithmorum canonis constructi: Edited by Andrew Hart (Edinburgh,1619).
- [2] Herrera-Armendia, F. G.: Enseñanza de la Matemáticas a través de la Música por PC: 1er Congreso General de Cómputo. Celebración Nacional de los 40 Años de Cómputo en México en Cómputo.98@mx. UNAM (México, 1998).
- [3] Bogachev, V.: Measure Theory Volume 1. Springer (Berlin,2007).
- [4] Bartle, R. G.: The Elements of Integration and Measure Theory. Wiley. (USA, 1995).
- [5] Cheney, E. W.: Introduction to Approximation Theory: NYpress (New York, 1986).
- [6] Harrison,J.: Floating point verification in HOL Light: the exponential function, Technical Report 428: University of Cambridge Computer Laboratory.Springer (Cambridge, 1997).
- [7] Muller, J. M.; Brisebarre, N.; Dinechin, F.; Jeannerod, C. P.; Lefevre, V.; Melquiond, G. ; Revol, N.; Stehlé, D. ; Torres, S.:Handbook of Floating-Point Arithmetic. p.14. Birkhäuser Boston-Springer (Boston, 2010).
- [8] Kahan, W.; Darcy, J. How Java's floating-point hurts everyoneeverywhere. Disponible en: <http://www.cs.berkeley.edu/~wkahan/JAVAhurt.pdf> (USA,1998).
- [9] Harrison, J.: A machine-checked theory of floating-point arithmetic: In Theorem Proving in Higher Order Logics: 12th International Conference, TPHOLs '99, volume 1690 of Lecture Notes in Computer Science. p.p. 113–130. Springer-Verlag, (Berlin, 1999).
- [10] Goldberg, D.: What every computer scientist should know about floating-point arithmetic: ACM Computing Surveys. ACM. p.p. 40-47. (USA, 1991).
- [11] D. Teichrow.: Use of continued fractions in high-speed computing. MTAC, v. 6. p. 127 (USA,1952)
- [12] AMD Inc. AMD Core Math Library (ACML) (last visited: 06-18-2007). <https://developer.amd.com/amd-aocl/amd-math-library-libm>
- [13] Intel® 64 and IA-32 Architectures Software Developer's Manual Volume 1:Basic Architecture <https://software.intel.com/content/www/us/en/develop/articles/intel-sdm.html>
- [14] Institute of Electrical and Electronics Engineers. IEEE IEEE/ISO/IEC 60559-2020 - ISO/IEC/IEEE International Standard - Floating-point arithmetic. IEEE. (USA,2020).
- [15] Remez, E. Ya.: Sur le calcul effectif des polynômes d'approximation de Tschébycheff. p.p. 337-340 (Paris,1934).
- [16] Mason, J.C. & Handscomb, D.C.: Chebyshev polynomials: Chapman & Hall/CRC (London,2002).

El corchete de Poisson y el conmutador de dos matrices cuadradas.

Sealtiel Pichardo Jiménez.

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco,
02420 CDMX, México.
phimath52@gmail.com

Resumen- El corchete de Poisson y el conmutador son dos operadores distintos ya que sus definiciones son completamente diferentes, pero este pequeño artículo relaciona a ambos, considerando al conmutador como el corchete de Poisson y de esta forma demostrar la identidad de Jacobi. Además, se reconoce la importancia de entender ambos operadores para futuros trabajos.

Palabras Clave- Corchete de Poisson, matrices cuadradas, Conmutador de matrices, Identidad de Jacobi.

Abstract- Poisson's bracket and the switch are two different operators since their definitions are completely different, but this small article relates both, considering the switch as Poisson's bracket and thus demonstrating Jacobi's identity. It also recognizes the importance of understanding both operators for future work.

Keywords- Poisson's bracket, square matrixes, matrix switch, Jacobi's Identity.

Mathematical Subject Classification: 00A35.

I. INTRODUCCIÓN

Se debe recordar que una matriz cuadrada es el arreglo de n renglones por n columnas que representamos con alguna letra mayúscula, por ejemplo $A_{2 \times 2}$ (matriz cuadrada de dos renglones por dos columnas), o bien $A_{3 \times 3}$ y en general $A_{n \times n}$. De aquí en adelante se escribirá a las matrices cuadradas solo con alguna letra mayúscula sin incluir el subíndice.

Cuando se habla del producto de matrices identificamos dos aspectos importantes [1].

- El producto es asociativo, es decir $(AB)C = A(BC)$
- Su producto por lo general es no conmutativo; es decir que $AB \neq BA$

Por lo que una operación natural dentro de las matrices es el *Operador conmutador* [2] que se define como:

$$[A, B] = AB - BA \quad (1)$$

Notando que si las matrices A y B si conmutan entonces $[A, B]$ será una matriz con todas las entradas igual a cero. Por otro lado, el corchete de Poisson es un operador que simplifica a la mecánica Hamiltoniana y tiene un parecido al estudio de la mecánica cuántica, pero independientemente de conocer este tipo de mecánicas, en [3] se define como:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial g}{\partial p} \quad (2)$$

donde p y q son las variables de f como de g . Si estas variables tienen varios componentes entonces se define como en [4]:

$$[f, g] = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right) \quad (3)$$

Con estas definiciones se pueden probar las siguientes propiedades (se invita al lector a demostrarlas):

1. *Antisimetría*

$$[f, g] = -[g, f]$$

2. *Linealidad*

$$[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g]$$

3. *Regla del producto*

$$[f_1 f_2, g] = f_1 [f_2, g] + f_2 [f_1, g]$$

4. *Identidad de Jacobi*

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

II. IDENTIDAD DE JACOBI USANDO EL CONMUTADOR

En libro de Goldstein [5] plantea al lector a realizar la siguiente demostración:

"Demostrar que se cumple la identidad de Jacobi si el signo del corchete de Poisson se emplea para representar al conmutador de dos matrices cuadradas"

Parece ser algo complicado, pero no es así, lo único que dice el enunciado es que ahora tomemos al operador conmutador y este estará definiendo nuestro corchete de Poisson; se necesita demostrar que:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \quad (4)$$

Demostración:

Desarrollemos cada uno de los sumandos:

$$\begin{aligned} [A, [B, C]] &= [A, BC - CB] \\ &= A(BC - CB) - (BC - CB)A \\ &= ABC - ACB - BCA + CBA \end{aligned} \quad (5)$$

Alguien podría pensar que simplemente podríamos cancelar ABC con ACB y CBA con BCA , pero recordemos que el

producto de matrices no conmuta; Así que continuemos con los otros sumandos:

$$\begin{aligned} [B, [C, A]] &= [B, CA - AC] \\ &= B(CA - AC) - (CA - AC)B \\ &= BCA - BAC - CAB + ACB \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [C, [A, B]] &= [C, AB - BA] \\ &= C(AB - BA) - (AB - BA)C \\ &= CAB - CBA - ABC + BAC \end{aligned} \quad (7)$$

Al sustituir (7), (6) y (5) en (4):

$$\begin{aligned} &ABC - ACB - BCA + CBA + \\ &BCA - BAC - CAB + ACB + \\ &CAB - CBA - ABC + BAC = 0 \end{aligned}$$

Notamos que hay productos de matrices que si son iguales entre sí, pero con el signo contrario, las cuales se expresan con el mismo color:

$$\therefore [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

Quiere decir que el conmutador de matrices cumple la identidad de Jacobi, una de las propiedades del corchete de Poisson, el mismo problema nos pide demostrar que se cumple la siguiente igualdad:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (8)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} [A, BC] &= (A)BC - BC(A) \\ &= ABC - BCA \end{aligned} \quad (9)$$

Agregando un cero que nos ayude:

$$\begin{aligned} [A, BC] &= ABC - BCA + BAC - BAC \\ &= ABC - BAC + BAC - BCA \\ &= (AB - BA)C + B(AC - CA) \end{aligned} \quad (10)$$

Lo cual es el conmutador de [A,B] multiplicado por la matriz C más la matriz B multiplicada por el conmutador de [A,C]:

$$\therefore [A, BC] = [A, B]C + B[A, C] \quad (11)$$

Entonces el conmutador también cumple una especie de *regla del producto* y notaremos que cumplirá con la *antisimetría* y la *linealidad* que también son propiedades del corchete de Poisson.

Esto quiere decir que en el fondo ambos operadores tienen algo en común, a simple vista notaremos que son operadores bilineales; según [2] el conmutador pertenece al álgebra de Lie, mientras que el corchete de Poisson al álgebra de Poisson. Lo que deja seguir investigando y estudiando el corchete de Poisson; ya que ambos se utilizan en la mecánica cuántica, solo que el conmutador ahora será entre operadores, los cuales están definidos en el espacio de Hilbert.

III. CONCLUSIONES

El corchete de Poisson es un operador que ha llamado mucho mi atención en primera instancia porque se relaciona con el estudio de la mecánica clásica y en segundo lugar porque se aprecia un parecido a los tensores y en general a temas aún más interesantes como la mecánica cuántica; así mismo recomiendo estudiar sus propiedades y buscar entender su estructura algebraica, funciones escalares y vectoriales con el momento angular en problemas[6].

REFERENCIAS

- [1] Gómez, C.: Álgebra Superior, curso completo. 1ra Ed. 2da Reimpresión. Publicaciones & Fomento Editorial. CDMX, México 2016 pp:542
- [2] Capítulo 4. Álgebras de Lie, consultado en <http://tesis.uson.mx/digital/tesis/docs/20084/Capitulo4.pdf>
- [3] Rodríguez Padilla J.: Geometría de sistemas Hamiltonianos en R3. Capítulo 1 "Concepto General del Formalismo Hamiltoniano". Tesis de posgrado. Universidad de Sonora, México. 2012. Retomada en: https://posgrado.mat.uson.mx/tesis/maestria/jairo_rodriguez.pdf
- [4] Oller, A.: Mecánica Teórica. Capítulo 3 "Teoría de Hamilton". Universidad de Murcia, Murcia. Retomado en: <https://www.um.es/oller/docencia/versionmteor.pdf>
- [5] Golstein, A.: Classical Mechanincs. 2da Ed. Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Massachusetts, U.S.A 1994, chapter 9.
- [6] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M.: Course of Theoretical Physics Volumen 1: Mechanics. Pergamon Press (Mosú, 1993).

Distancia entre dos puntos, sus dificultades por escala errónea y su aplicación en el teorema de Pitágoras.

Efrain Valencia Calzadilla.

Asesor Técnico Pedagógico Secretaria de Educación Pública de México.
deskraton@gmail.com

Resumen- En el presente trabajo se busca dar a conocer algunas dificultades a las que se enfrentan los estudiantes de educación secundaria cuando no se aborda una representación de determinada problemática con una adecuada escala y medidas en los temas de geometría y trigonometría, especialmente la distancia entre dos puntos pero aterrizado en el teorema de Pitágoras, esto para buscar brindar alternativas en la introducción o presentación de situaciones de aprendizaje con estos temas y algunos otros que sirven como repaso y conocimiento previo para la correcta ejecución adecuada de estas técnicas, que no solamente van a favorecer al educando en la resolución autónoma de problemas, si no en la validación de los mismos, consiguiendo a la par un avance en el desarrollo de las competencias requeridas en la educación Mexicana.

Palabras Clave- plano cartesiano, teorema de Pitágoras, distancia entre dos puntos, representación, competencias.

Abstract- Article reveals children's difficulties in elementary school on problem representation in imprecise measurement and scales in geometric and trigonometric topics, abiding in distance between two points on Pythagorean theorem providing alternatives in the learning situations and topics for review and prior knowledge for the correct using of techniques for an autonomous problem resolution and validation of them, achieving an advance on Mexico's education competences required.

Keywords- Cartesian plane, Pythagorean theorem, distance between two points, representation, powers.

Mathematical Subject Classification: 00A35

I. INTRODUCCIÓN

Comenzar a trabajar con el plano cartesiano siempre es un gran reto para los alumnos de nivel básico, aunque el tema se encuentra inmerso en todos los planes y programas de educación obligatoria, es muy difícil lograr el manejo total del mismo, ya que en muchas ocasiones los educandos no saben cómo trazar adecuadamente el plano, ya que no mantienen la misma distancia entre cada unidad de los ejes, algunas otras ocasiones no saben colocar correctamente las coordenadas o simplemente confunden el eje de las ordenadas y las abscisas, aun con todo ello, es importante su dominio debido a que el sistema de cuadrantes ofrece una ubicación exacta de puntos en un plano, situación que considero es altamente recomendable para poder ejemplificar ejercicios y de esa forma no caer únicamente en representaciones al azar, que en muchas ocasiones causan problemas a los estudiantes ya que no se encuentran a una escala adecuada y esto por factor visual de los ejercicios logra una mala percepción sobre las distancias, ya que causa que en muchas ocasiones se represente 100m de altura en 2

cuadros de un cuaderno y 5 cm en un cuadro del mismo cuaderno, teniendo de esa forma una representación del problema errónea, esto conduce a no lograr una buena dimensionalidad de los objetos, pero sobre todo a que los problemas se alejen de la realidad y se pierda una manifestación visual de la situación, dejando todo únicamente a la abstracción de datos, provocando en muchos casos poca comprensión, debido a que no los adolescentes no logran comprender el problema y menos las distancias de las que se les está hablando y al no comprender o imaginar las distancias reales que se tienen, entonces cualquier resultado les puede parecer correcto ya que están alejados de la realidad que se les plantea.

II. EL PROBLEMA CON LAS MEDIDAS

Medir siempre ha sido necesario para el ser humano desde el antiguo Egipto donde era necesaria la división de las parcelas para poder calcular los impuestos para pagar al dueño de las mismas, hasta la construcción de grandes estructuras como los edificios de nuestros días, ya que la geometría estudia figuras planas y sólidas mediante axiomas y teoremas[1]; por ello es importante que al enseñarla en las escuelas se tome en cuenta que estamos trabajando con medidas que deben tener una equivalencia universal para las personas, pero si en ocasiones como docentes las enseñamos y no le damos una representación adecuada, esto causa confusión en nuestros aprendices, debemos de recordar que se puede representar nuestra realidad mediante 3 ejes coordenados rectangulares, que forman 8 octantes y los 3 planos XY, XZ y YZ, que nos dan un espacio vectorial para representar distintos fenómenos[2], cuestión que en secundaria se puede reducir al plano XY ya que representa cuestiones planas de nuestra realidad mediante el eje de sistemas coordenados a la par da un orden y sobre todo una representación a escala sobre las problemáticas que se muestren en las clases de esa forma se pueden trabajar con medidas claras y escalas adecuadas, que apoyan al principio de la geometría en sí.

Con esto se puede dar una percepción visual adecuada y trabajar sobre datos correctos, representaciones más reales lo que nos ayuda al planteamiento de temas importantes de geometría y trigonometría, haciendo énfasis en esta ocasión en el tema distancia entre 2 puntos ya que es un tema que abarca precisamente esta

problemática de las distancias y la representación también del teorema de Pitágoras ya que nos dice la fórmula: rectangular de m filas y n columnas como:

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (1)$$

Cuestión importante que nos permite manejar y aplicar el aprendizaje esperado: “Formula, justifica y usa el teorema de Pitágoras” [3] en los alumnos de tercer grado de una forma eficiente y más amplia ya que interviene también la lectura de gráficas y el manejo de variables, todo en un tema que es de los más importantes en la geometría analítica y la trigonometría, ya que en estas temáticas están inmersos diversos conceptos, como lo son punto, línea, distancia, magnitud, así como las operaciones básicas por lo que es un tema amplio y rico para trabajar con los estudiantes de este nivel.

III. METODOLOGÍA

Al trabajar con medidas es importante recordar que las hay conmensurables e inconmensurables [4], concepto difícil de alcanzar a comprender ya que en muchas ocasiones se confunde en la mente de nuestros alumnos por diversas ideologías y significados que le da la población en general ya que lo inconmensurable lo definen como el infinito y para ellos es algo que nunca termina o es eterno y lo asocian con diferentes significados tanto religiosos como emocionales, esta idea no se suele corregir y se deja que los alumnos sigan con la misma ya que el docente se trata de centrar en lo tangible, pero esa parte tangible se ve afectada en muchas ocasiones cuando las medidas sobrepasan la capacidad de ser representadas en una libreta, ya que recordemos que las medidas de estas están limitadas y si pedimos trazar una línea de 3 metros esta ya no se puede trazar en el cuaderno, por lo que es necesario plantear y decirle a los alumnos cómo plantear una escala y cuál es su uso correcto, para que de esa forma las representaciones que se realicen tengan sentido y un significado, ya que esta parte ha sido menospreciada y solamente se trazan líneas o esbozos de los objetos que se plantean en los problemas al azar.

Esto pareciera que no acarrea ni una dificultad, al contrario permite al docente manifestar de forma rápida un bosquejo visual del problema que va a plantear ya que con la duración de las clases es necesario ser eficiente y eficaz o de lo contrario no se podría explicar ni un solo tema, pero es en esa velocidad de explicación donde dejamos en los educandos una mala idea sobre las distancias ya que les demostramos que no importan las medidas y que da igual la representación, pero al entregar los resultados es realmente el momento donde cuenta el docente que no esta del todo clara esta situación, ya que se le recrimina al alumno, “cómo crees que va a medir 6 o 10 m alguna distancia si esto mide 100” por mencionar un ejemplo, hasta que se le comenta la situación a nuestro aprendiz este cae en cuenta que suena ilógico, pero mientras en su representación parece que si es posible, por ello la importancia de las escalas y las medidas adecuadas para poder plantear la idea de forma adecuada y tener a la vista lo evidente.

En el plano cartesiano hay que tener claro que las medidas nos van a ayudar a plantear situaciones claras ya que

se encuentran sobre ejes rectos, que permiten el desplazamiento de los puntos sobre ellas para poder dar una representación concreta sobre un problema, de esa forma únicamente hay que lograr que se marque la escala con la que se va a trabajar y con la ubicación de las coordenadas ya al ubicar adecuadamente los puntos [5]:

$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2) \quad (2)$$

$$D = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (3)$$

permitiéndonos de esta forma tratar con el teorema de Pitágoras de una forma diferente y con una representación clara como en el siguiente ejemplo:

Dos personas se encuentran en puntos diferentes de la ciudad una en las coordenadas $P_1(15,20)$ y la segunda $P_2(6,8)$, ¿qué distancia las separa?

El problema es sencillo y sale en apariencia totalmente de la situación de calcular el valor de la hipotenusa [6], cuestión que siempre se recalca con los alumnos pero en este caso no, ya que únicamente se plantea un problema de dos puntos que se resuelve:

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad (4) \\ D &= \sqrt{(15 - 6)^2 + (20 - 8)^2} \\ D &= \sqrt{(9)^2 + (12)^2} \\ D &= \sqrt{81 + 144} \\ D &= \sqrt{225} = 15 \end{aligned}$$

Poniendo en práctica la ubicación exacta de medidas con la escala adecuada en el plano cartesiano, la interpretación de coordenadas en los puntos que se pide, las operaciones básicas y el mismo teorema de Pitágoras:

IV. CONCLUSIONES

Trabajar con temas de geometría nos conduce regularmente al uso de medidas, más cuando es geometría analítica, por ello una forma más fácil de comprender las cosas es cuando las podemos ver y las hacemos, ya que si únicamente las hacemos no podemos dimensionar de manera adecuada el impacto de lo que estamos aprendiendo, por ello considero importante que los estudiantes de educación secundaria dominen bien el plano cartesiano para poder dar representaciones correctas y concretas a lo que están realizando ya que de esa forma pueden también visualizar que es lo que esta sucediendo o se les requiere en la situación problema para ayudar en su proceso de aprendizaje a lograr ser conscientes de las respuestas que están dando a un problema, esta parte es importante ya que las técnicas empíricas pueden envolver al alumno en los pasos manteniendo la atención de que procesos se están realizando y esto dar oportunidad a que le dé un sentido a lo que realiza, al final las distancias se pueden comprobar siempre midiendo y por ello también se encuentra el método gráfico que se utiliza en física al trabajar con vectores, siendo algo de introducción, pero de gran valor para la comprensión del

tema, también este proceso puede ayudar a servir de validación de un problema [7] ya que al tener una alternativa no numérica para comprobar las respuestas que obtiene puede el dejar de depender de alguien que lo revise ya sea compañeros o maestros y lograr entonces si una autonomía en la resolución de problemas ya que no solamente manejará diversas técnicas, si no con las mismas será capaz de validar resultados y procedimientos.

La presentación diferente del teorema de Pitágoras puede auxiliar al docente también a introducir a sus educandos en este tema y además darle un cambio al formato clásico que siempre se maneja [8], ya que si bien no todos la gran mayoría se centra únicamente a responder problemas con evidentes triángulos rectángulos y solamente alternar en el valor faltante a alguno de los catetos, por tal motivo esta opción puede reforzar diferentes temas que se abordan en la geometría y trigonometría como en las operaciones básicas

La presentación diferente del teorema de Pitágoras puede auxiliar al docente también a introducir a sus educandos en este tema y además darle un cambio al formato clásico que siempre se maneja y los requerimientos, ya que si bien no todos la gran mayoría se centra únicamente a responder problemas con evidentes triángulos rectángulos y solamente alternar en el valor faltante a alguno de los catetos, por tal motivo esta opción puede reforzar diferentes temas que se abordan en la geometría y trigonometría como en las operaciones básicas.

REFERENCIAS

- [1] Puertas, M.L.: Euclides: Elementos: Libro I-V: Editorial Gredos (Madrid,1991)
- [2] Lira-Mujica, S.: Didáctica vectorial: Instituto Politécnico Nacional (México, 1995)
- [3] SEP: Planes y Programas de estudio 2017 (México,2017)
- [4] Devoloper.
<https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/secundaria/mate/1-LPM-sec-Matematicas.pdf>: Accedido 22 de abril del 2020
- [5] Granville, W.A.: Cálculo Diferencial e integral: Unión tipográfica editorial Hispano- Americana: p.12 (México, 1955)
- [6] SEP: Planes y programas de estudio de matemáticas:SEP (México, 2011)
- [7] Benítez, A.: Matemáticas por competencias: Pearson. (México,2011)
- [8] Panizza, M.: Enseñar Matemática en Nivel Inicial y Primer Ciclo de la E.G.B: Análisis y Propuestas: Paidós.(Buenos Aires, 2004)

El desarrollo de la comprensión del aspecto matemático del logaritmo mediante la intuición y la axiomatización en los estudiantes de Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas al término de la aplicación de su programa educativo

Francisco Guillermo Herrera Armendia

Escuela Normal Superior de México, Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.
harmendia@gmail.com

Resumen- Desde el ciclo escolar 2000 – 2001, se cursó la asignatura denominada Los Números y sus Relaciones ubicada en el Tercer Semestre de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en Matemáticas hasta su última aplicación en el ciclo 2018 - 2019, debido a la actualización de los Planes y programas de estudio en las Escuelas Normales del país. El estudio presenta un recuento de la comprensión del concepto de logaritmo en los estudiantes que cursaron esta asignatura a lo largo de 18 años de trabajo académico, así como el impacto en el logro de algunos aspectos de los Rasgos del Perfil de Egreso de dicho programa educativo. Se analizan los productos académicos de estudiantes, con base en la Metodología Didáctica de Guy Brousseau, específicamente las situaciones didácticas. Desde su inicio, se detectaron dos grandes problemáticas, de las que se derivan otras más específicas. La primera se relaciona con el desconocimiento del tema por parte de muchos estudiantes, pues desde el Programa para secundarias de 1993, el tema de logaritmos se omitió. La segunda, el abuso en el uso de las calculadoras, que además no están programadas para obtener logaritmos de números mayores a cero y menores que 1.

Palabras Clave- Pensamiento Intuitivo, logaritmos, cociente de radicales con radicandos mayores que cero y menores que 1.

Zusammenfassung- Vom Schuljahr 2000 bis 2001 wurde das Fach Zahlen und ihre Beziehungen im dritten Semester des Bachelorabschluss im Erziehungswesen mit Spezialisierung auf Mathematik bis zu seiner letzten Anwendung im Zyklus 2018 bis 2019 aufgrund der Aktualisierung des Fachs belegt. Pläne und Studienprogramme in den normalen Schulen des Landes. Die Studie enthält einen Bericht über das Verständnis des Logarithmuskonzepts bei den Studenten, die dieses Fach während 18 Jahren akademischer Arbeit belegt haben, sowie über die Auswirkungen auf die Erreichung einiger Aspekte der Merkmale des Absolventenprofils dieses Bildungsprogramms. Die akademischen Produkte der Schüler werden anhand der didaktischen Methodik von Guy Brousseau analysiert, insbesondere anhand didaktischer Situationen. Von Anfang an wurden zwei Hauptprobleme festgestellt, von denen sich andere spezifischere ableiten. Der erste bezieht sich auf das mangelnde Wissen vieler Schüler über das Fach, da seit dem Grundschulprogramm von 1993 das Thema Logarithmen

weggelassen wurde. Das zweite ist der Missbrauch bei der Verwendung von Taschenrechnern, die ebenfalls nicht darauf programmiert sind, Logarithmen von Zahlen größer als Null und kleiner als 1 zu erhalten.

Schlüsselwörter- Intuitives Denken, Logarithmen, Quotient von Radikalen mit Radikalen größer als Null und kleiner als 1.

Mathematical Subject Classification: 97D70.

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo del pensamiento axiomático en estudiantes de nivel licenciatura relacionada con la enseñanza de las matemáticas a nivel secundaria, no fue fácil de lograr, sobre todo porque el enfoque del Plan de Estudios de la Licenciatura en Educación Secundaria con especialidad en matemáticas (LESM)[1] se centró en el desarrollo de habilidades relacionadas con el conocimiento profundo de la escuela secundaria incluida la normatividad vigente y la gestión del aprendizaje en ese nivel educativo, más que en el dominio de la especialidad seleccionada por los estudiantes, en este caso, matemáticas. Sin embargo, antes que administrar o gestionar recursos para el logro de los propósitos de la escuela secundaria, ellos se preparan para atender jóvenes estudiantes de secundaria, es decir, estar frente a grupo en la asignatura de matemáticas. Por ello, la apropiación de un discurso matemático apropiado es decir, un dominio correcto de términos y objetos matemáticos es necesario y primordial para todo aquel que pretenda dedicarse a esta profesión, independientemente del programa educativo que curse para ello.

Con base en la intervención docente del formador de formadores se justifica el desarrollo del proceso de axiomatización con base en la aplicación de las situaciones didácticas de G. Brousseau[2], con el propósito de que el docente en formación se apropie del discurso matemático necesario para guiar el aprendizaje de estudiantes de la asignatura de matemáticas en las escuelas secundarias

Durante la vigencia del Plan de Estudios 1999[1] se enfrentaron dos problemáticas generales, de las que se derivaron otras más a largo del estudio del tema de logaritmos. La primera se relacionó con el desconocimiento del término matemático definido como logaritmo, debido a que los estudiantes que cursaban el tercer semestre del programa educativo, en su gran mayoría, habían egresado de la escuela secundaria con el Plan de estudios 1993, que ya no incluía el estudio de este objeto matemático (salvo en contados estudiantes, quienes habían cursado el Plan de estudio 1981. Aunado a esta situación, los Planes de Estudio del nivel Medio Superior variaban en sus contenidos temáticos en la asignatura de matemáticas, sobre todo en instituciones cuyos planes de estudios eran diferentes a los de las Vocacionales, Colegios de Bachilleres y Escuelas Preparatorias, por ello los estudiantes habían revisado poco y a veces nada de este contenido, así que la apropiación en ellos del tema para trabajarlo a nivel licenciatura no era la mejor. La segunda problemática que se presentó fue el abuso en el uso de la tecnología digital, que en el entorno del salón de clase fue la calculadora electrónica científica. El estudio de los logaritmos incluye revisar las propiedades de campo F que justifican las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación con logaritmos. La dificultad más elocuente fue cuando se incluyen en las operaciones los logaritmos de números mayores que cero, pero menores que la unidad. Pese a que se utilizaron las Tablas de Logaritmos para encontrar los valores logarítmicos de los números reales R propuestos, cuando se utilizaba el dispositivo electrónico, éste no arrojaba el valor logarítmico adecuado, como es sabido, pues todavía no existe el programa en estos dispositivos que pueda separar la característica (que puede ser positiva o negativa) del valor de la mantisa (siempre positiva). Los estudiantes no podían interpretar el resultado arrojado por el dispositivo, lo que dificultó el estudio de los algoritmos de cálculo con base en los logaritmos al inicio de su estudio. Con base en la descripción anterior, la hipótesis central del presente estudio es la siguiente: con el apoyo de la intuición de los estudiantes, el diseño y aplicación de una secuencia didáctica basada en la tipología propuesta por G. Brousseau[2] facilita el desarrollo del pensamiento axiomático en ellos, con el tema de logaritmos. En las siguientes secciones del presente artículo se describen las características de esta propuesta y se justifica su apoyo para lograr el pensamiento axiomático antes mencionado.

1.- Antecedentes. En esta sección se explica la estructura del Programa Educativo LESM, su enfoque, propósitos, rasgos del perfil de egreso. Además se da a conocer los objetivos generales y particulares de la asignatura Los Números y sus relaciones.

2.- Historicidad del objeto Matemático. En esta sección se ofrece una descripción sobre el descubrimiento de los logaritmos (neperiano, común o vulgar y natural) con dos propósitos relacionados con el proceso de enseñanza: a) dar a conocer la forma en que se fue desarrollando este objeto matemático, pues permite una mejor comprensión por parte de los estudiantes[3][4], pues no queda aislado como un hecho fortuito sino que es una consecuencia del avance mismo de la matemática a través del tiempo, b) la historicidad de todo objeto matemático forma parte esencial de una adecuada metodología de enseñanza[5][6]; es decir que el proceso de enseñanza se completa al incluir el proceso histórico inherente al objeto de enseñanza.

3.- El objeto matemático: Logaritmo de un número. En esta sección se ofrece un análisis basado en 4 productos de investigación en el contexto de la matemática moderna: 1) La prueba de existencia para logaritmos, de Hohn; 2) Una propiedad del logaritmo de Greenstein[7]; 3) La Prueba de la Ecuación de Euler de Allendoerfer[8]; 4) Funciones Hiperbólica y Exponencial, de Dunkel[9], y que son conocimientos necesarios que todo formador de formadores debe poseer para diseñar y aplicar una secuencia didáctica que permita un eficiente proceso enseñanza – aprendizaje

4.- La problemática. Ésta se ha agrupado en cuatro apartados: 1) el tema de logaritmos en la escuela secundaria mexicana; 2) el abuso en el uso de las calculadoras electrónicas; 3) el trabajo con logaritmos: la interacción con la calculadora; 4) el trabajo con logaritmos: aplicación de propiedades de los números reales. Esta división permite explicar de manera detallada la problemática observada en los estudiantes cuando se estudia este tema en el programa LESM.

5.- Las situaciones y la metodología didácticas. En esta sección se dan describen las situaciones didácticas que son parte de la Teoría de las Situaciones didácticas, producto de investigación de Guy Brousseau[2] y que ha tenido muy buen aceptación por parte de los estudiantes del programa educativo LESM, Plan de estudios 1999[1]. También se describe la metodología didáctica, en este caso propuesta por A. Doneddu, referente a la enseñanza de los números reales. Además se hace la distinción entre la metodología de enseñanza y el método didáctico, en el contexto de la matemática. 6) Descripción del Plan de Trabajo para abordar el tema de Logaritmos. Se explica la forma en que se relaciona el contexto de las situaciones didácticas con el contenido temático de logaritmos. Sin embargo el contenido mismo del plan de trabajo se explica en las secciones 1 a 5 del presente artículo. 7) Análisis de resultados. En esta sección se enlistan los resultados observados durante todo este periodo de tiempo y catalogándolos de la siguiente manera: a) Muy Satisfactorio; b) Satisfactorio; c) Bueno; d) regular; e) malo. 8) Conclusiones. Finalmente, y con base en el análisis anterior se da respuesta a la hipótesis planteada, relacionada con la intuición, las situaciones didácticas y el desarrollo de un pensamiento axiomático.

A) ANTECEDENTES

El programa educativo LESM, sustentado en el Acuerdo Secretarial No. 269 inicia su aplicación en las escuelas normales del país en septiembre de 1999. Sin estipular rasgos del perfil de ingreso, el programa educativo comprende una sola licenciatura, con once especialidades (en la Escuela Normal Superior de México): Español, Matemáticas, Inglés, Física, Química, Biología, Historia, Formación Cívica y Ética, Geografía, Pedagogía y Psicología Educativa. Comprende tres campos de formación: a) Formación general para educación básica; b) Formación común para todas las especialidades de secundaria; c) Formación específica por especialidad. También propone tres áreas de actividad: a) Actividades principalmente escolarizadas; b) Actividades de acercamiento a la práctica escolar, c) Práctica intensiva en condiciones reales de trabajo. A lo largo de ocho semestres, los estudiantes inscritos desarrollan el conjunto de rasgos del Perfil de Egreso, que incluye cinco grandes apartados: a) habilidades intelectuales específicas; b)

dominio de los propósitos y contenidos de la educación secundaria; c) competencias didácticas; d) identidad profesional y ética; e) capacidad de percepción y respuesta a las condiciones sociales del entorno de la escuela. Durante los dos primeros semestres los docentes en formación inicial no cursan asignaturas de contenido matemático, aunque en segundo semestre se ofrece la asignatura “Introducción a la enseñanza de las Matemáticas”, cuyo estudio se centra en que los estudiantes analicen propósitos, enfoque de enseñanza y los contenidos básicos de las matemáticas en la escuela secundaria, es decir, no se aborda un estudio a nivel superior de las matemáticas. Es hasta el tercer semestre de la carrera que los estudiantes empiezan a tener un acercamiento un poco más formal del estudio de las matemáticas a nivel superior. Dos son las asignaturas en este semestre: Pensamiento Algebraico y Los números y sus Relaciones. Sin embargo, el nombre mismo de estos módulos refleja perfectamente el enfoque de su estudio: un acercamiento al estudio del Álgebra y la Aritmética. Es así que en tercer semestre se ofrece la asignatura “Los números y sus relaciones”, cuatro horas por semana, con siete créditos al término de la misma. En la presentación del programa de la asignatura se hace énfasis en la naturaleza de la matemática, y su organización con base en las propiedades de los números[10] así mismo se menciona la importancia de ellos en la vida cotidiana de todo ser humano, pues su estudio le permite efectuar la cuantificación de cada actividad que realiza incluyendo la medida en distancias astronómicas, o la medición del tiempo desde el origen de la especie humana. Para la sociedad global actual, los números tienen muchísima importancia y son imprescindibles así que su entendimiento y uso son de vital importancia. Sin dejar de lado lo estipulado en la fracción II, del Artículo 7 de la Ley General de Educación que hace énfasis en favorecer el desarrollo de facultades para adquirir conocimientos, así como la capacidad de observación, análisis y reflexión críticos (DOF, 2015), los propósitos generales del curso se refieren a: 1) Adquisición de bases sólidas en relación con el estudio de los números y sus relaciones, tanto para abordar los siguientes cursos de la especialidad como para realizar un trabajo docente de calidad; 2) Adquisición de elementos para analizar situaciones de estudio relacionadas con el significado de los números, sus relaciones y operaciones, que resulten adecuadas para los estudiantes de secundaria. 3) Desarrollo de habilidades para resolver problemas en diferentes contextos, con base en el conocimiento de los números y sus relaciones[10]. Los bloques temáticos propuestos son los siguientes: Bloque 1: Aspectos históricos de los sistemas numéricos. Bloque 2: Los números enteros. Bloque 3: Números Racionales. Bloque 4: Proporcionalidad. Se estipula en el apartado Orientaciones Didácticas la idea de problematizar el estudio de la disciplina, es decir, que tiene un enfoque de enseñanza – aprendizaje basado en la resolución de problemas, que ha sido catalogado como una de las cuatro competencias en el estudio de la matemática en la escuela secundaria; las otras tres han sido: la comunicación, la argumentación, manejo de técnicas[11]; esta misma idea prevaleció en la actualización de los planes de estudio 2011, denominadas competencias matemáticas, a saber: resolver problemas de manera autónoma; comunicar

información matemática; validar procedimientos y resultados; manejar técnicas eficientemente[12]; inclusive desde el Plan de estudio 1993 ya se marcaba puntualmente que un propósito central de los programas de matemáticas consistía en que el estudiante aprendiera a utilizar la matemática para resolver problemas, por ello su enseñanza en la escuela secundaria entonces tenía por propósito general el desarrollo de habilidades operatorias, comunicativas y de descubrimiento[12]. Es importante mencionar aquí la gran ventaja del plan de estudios 1999 de la LESM, pues se ajustó de manera eficaz a la modalidad de enseñanza requerida en las escuelas secundarias, desde el punto de vista pedagógico, como se aprecia al comparar los propósitos de la enseñanza en la escuela secundaria con las orientaciones didácticas de la asignatura curricular Los números y sus Relaciones, y no nada más en ésta, sino que todas las asignaturas relacionadas con los contenidos de la especialidad tenían esta orientación didáctica; por el contrario, esta priorización descuidó en mucho la profundización en el estudio formal de la matemática a nivel superior; sin embargo, esta situación cambió con la implementación del Plan de Estudios 2018 correspondiente a la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, en el que la prioridad es el contenido matemático. Ahora, retomando el análisis breve de la asignatura Los Números y sus Relaciones, se sugiere una evaluación sustentada en el Acuerdo Secretarial No. 261, cuyo enfoque ha sido formativo, sustentado a su vez en el Artículo 50 de la Ley General de Educación. Como se aprecia, el tema de logaritmos no está definido explícitamente en los contenidos propuestos, sin embargo, dado el carácter de disciplina de nivel superior y relacionada con el conocimiento de los números, este tema no podía dejarse de lado, más aun si el proceso de enseñanza se sustenta en el método didáctico propuesto por Doneddu[14].

II. HISTORICIDAD DEL OBJETO MATEMÁTICO

La eficiencia de los algoritmos de cómputo en la etapa de mayor desarrollo de la matemática se debió en gran parte al descubrimiento de los logaritmos (además de la popularización del uso del sistema de posición decimal, incluidas las fracciones decimales. Era la época en que Kepler estudiaba a fondo las órbitas planetarias y Galileo observaba el cielo nocturno con los primeros telescopios. A fines del siglo XVI y principios del XVII los matemáticos germanos se dedicaron a construir las tablas trigonométricas de gran precisión, que junto con los logaritmos acortaron a la mitad el esfuerzo que realizaban los calculistas al resolver problemas relacionados con muchas áreas del conocimiento (astronomía, navegación, milicia, economía, finanzas, agrimensura, entre otras). John Napier (1550 – 1617), Barón de Merchiston, cerca de Edimburgo, fue quien descubrió los logaritmos[6]. A sus trece años ingresó al colegio de St. Salvator en St. Andrews. A petición de un tío suyo quien intercedió ante su padre para que lo inscribiese en escuelas de Francia o Flandes para que pudiese tomar mejores lecciones que en Escocia, lo llevó a estudiar fuera de su país natal. Napier fue un excelente estudiante de teología y astrología, al grado de ofrecer pruebas de que el Papa representaba al anticristo. Pero lo más meritorio de su genio fue sin duda, sus estudios en matemática pues dedicó a ella más de cuarenta años de su vida. Sin embargo,

solo algunos de sus fragmentos matemáticos se publicaron hasta 1839; su obra se enfocó en la simplificación y sistematización de la aritmética, el álgebra y la trigonometría[6].

En 1617 se publicó su obra titulada *Rabdología* en la que se describían las varillas o “huesos” de Napier[15][16] y otros dispositivos diseñados para simplificar los procesos de la multiplicación y la división; esta obra fue bien acogida en el continente Europeo y por algún tiempo atrajo más la atención del público que sus logaritmos. En la dedicatoria de esta obra, Napier escribió que siempre se había esforzado al máximo y apelado al valor de su capacidad para eliminar la dificultad y el tedio en el proceso del cálculo cuya ironía suele disuadir a muchos estudiantes de matemáticas[6]; los logaritmos de Napier fueron el resultado de trabajo aislado y prolongado, además de que no recibió ayuda de alguien. Hace algunos años, antes del abuso en el uso de los dispositivos electrónicos de cálculo, era muy común la comprensión de la notación logarítmica, sin embargo en la época en que vivió su autor nuestra notación exponencial todavía no estaba disponible, pues aún no se concretaba el acuerdo de la simbología relativa a los exponentes, propuesta por Stifel y Stevin, ni la de Harriot para el álgebra, que aparece muchos años después de la muerte de Napier, lo que es una de las más grandes curiosidades históricas del quehacer matemático y científico pues Napier construyó los logaritmos mucho antes que la notación exponencial entrase en uso debido al trabajo matemático de Euler. Entonces surge la pregunta ¿cómo fue que Napier empezó a construir sus logaritmos? Justo aquí es cuando se puede recurrir al concepto de intuición y su uso didáctico en la enseñanza de la matemática[17]. Etimológicamente significa tener una percepción clara, íntima o instantánea de una idea, tal como si se tuviera a la vista[18]. Con base en la intuición, es posible conjeturar resultados con base en la observación de una figura como esta:

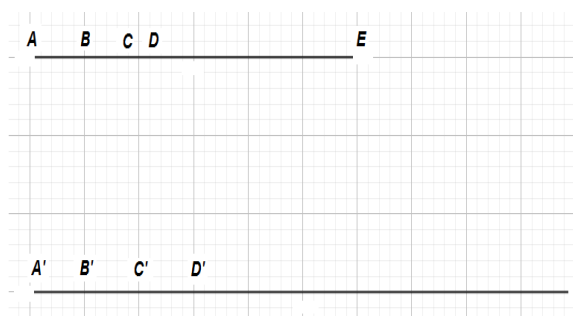


Figura 1. Intuición para comprender la idea del logaritmo. [6].

Se trata de imaginar dos puntos que “inician su movimiento”, uno sobre el segmento de recta $\overline{AE}$ y el otro sobre el segmento $\overline{A'D'}$, además imaginemos también que la “velocidad de ambos” sea la misma durante el primer momento. La “velocidad” del punto sobre el segmento $\overline{A'D'}$ es uniforme, pero no sobre el segmento $\overline{AE}$ ya que decrece de tal modo que cuando “llega” al punto C , su “velocidad” es proporcional a la distancia restante $\overline{CE}$. Es así que el primer punto se “mueve” sobre la distancia $\overline{AC}$, mientras el segundo lo hace sobre la distancia $\overline{A'C'}$. Al imaginar esta situación, Napier intuyó en llamar $A'C'$ el logaritmo de $\overline{CE}$. Se aprecia todavía la influencia geométrica heredada de Grecia y que

permitía comprender el objeto matemático en cuestión, en este ejercicio mental hecho por Napier. En nuestro contexto moderno, se recurre al lenguaje algebraico con objeto de tener una mejor perspectiva de este hecho. Así debemos suponer una velocidad inicial muy grande $v = \overline{AE}$. Entonces, durante cada pequeño intervalo sucesivo o momento temporal es medido aproximadamente por la expresión $\frac{1}{v}$. La primera distancia del segmento de recta $\overline{AE}$ se recorrerá aproximadamente en la unidad de distancia, que es el producto de la velocidad uniforme v y el tiempo $\frac{1}{v}$. Para la siguiente distancia pero comenzando ahora con una velocidad $v = \overline{AE}$, el punto “viaja” durante el primer momento muy cercano a la distancia de la unidad $\overline{AB}$ y “llega” a B con una velocidad $\overline{BE} = v - 1 = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)$. Durante el segundo momento de tiempo, la velocidad para el siguiente punto es muy cercana a $v - 1$; entonces la distancia $\overline{BC}$ se representa ahora por la expresión $\frac{v-1}{v}$, por lo que la distancia $\overline{CE} = \overline{BE} - \overline{BC} = v - 1 - \frac{v-1}{v} = v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^2$.

De esta misma manera, la distancia del punto desde E al final del tercer momento se expresa así: $v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^3$ así que después del n ésimo momento, la distancia es $v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^n$.

Las distancias desde E de los puntos cercanos al final de momentos sucesivos se representan por las expresiones de la columna derecha de las dos siguientes series (muy aproximadamente) y la siguiente columna representa los intervalos de tiempo de A' a D' :

v	0
$v\left(1 - \frac{1}{v}\right)$	1
$v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^2$	2
$v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^3$	3
$\dots$	$\dots$
$v\left(1 - \frac{1}{v}\right)^v$	v

Tabla 1. Series que representan velocidades y momentos, según Napier. [6].

La idea es clara, pues para Napier los dígitos de la serie de la columna derecha representan muy aproximadamente los logaritmos correspondientes a las series de la columna izquierda.

Es también fácil observar que las expresiones de la columna izquierda representan una progresión geométrica y los dígitos de la columna derecha, una progresión aritmética, por lo que es justamente aquí que el descubrimiento de Napier consolida brillantemente las aportaciones de investigadores previos a él, como Arquímedes y Stifel, ofreciendo continuidad a la labor de sus antecesores. En un contexto actual, pero con logaritmos de base 10, es fácil verificar el gran descubrimiento de Napier: relacionar las progresiones aritméticas con las geométricas y generar una poderosa herramienta que facilita (aun hoy) muchas operaciones aritméticas. Así por ejemplo los números en la progresión geométrica 1, 10, 100, 1000 tienen como logaritmo, respectivamente, los números de la progresión aritmética 0, 1, 2, 3. Sin embargo es posible observar una peculiaridad notable en los logaritmos de Napier: aumentan a medida que los números disminuyen, además los

números que exceden v tienen logaritmos negativos; es más, cero es el logaritmo de v y no de la unidad como actualmente sucede. Napier igualó este valor de v con 10^7 .

El no calculó los logaritmos de números enteros sucesivos a partir de la unidad, sino que hizo esta tarea con el valor de los senos, pues su objetivo era simplificar los cálculos trigonométricos. Retomando el modelo geométrico usado por Napier[19], el segmento de recta $\overline{AE}$ representaba al seno de 90° o un radio que fue igualado con 10^7 unidades. $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ representan senos de arcos, y $\overline{A'B'}$, $\overline{A'C'}$, $\overline{A'D'}$ sus respectivos logaritmos. Por el análisis anterior, es evidente que los logaritmos descubiertos por Napier no son los mismos que los logaritmos naturales de base $e = 2.718 \dots$ Esta diferencia debe enfatizarse, puesto que es bastante frecuente que los libros de texto escolares sobre álgebra indiquen que los logaritmos naturales fueron descubiertos por Napier.

Los matemáticos alemanes de fines del siglo XIX fueron los primeros en puntualizar esta diferencia, sin embargo es curioso leer el artículo titulado “Logarithmus” en el Brockhaus’ Konversations Lexikon de 1884 en el que se encuentra la afirmación de que Napier inventó los logaritmos naturales [5].

La relación que existe entre estos dos sistemas de logaritmos se expresa:

$$\log Nap. y = 10^7 \log nat. \frac{10^7}{y} \quad (1)$$

También se debe mencionar que Napier no determinó la base de su sistema de logaritmos, pues la noción de base no fue sugerida por él en su sistema de logaritmos, y de hecho, es inaplicable, a menos que sea modificado de alguna manera.

Para que esto suceda la condición necesaria y suficiente es que cero sea el logaritmo de 1 y no de 10^7 . La relación $\log 1 = 0$ se obtiene, aproximadamente, si cada término de las series geométrica y aritmética de Napier es dividido por v o 10^7 . Esto se observa en la siguiente tabla:

1	0
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)$	$\frac{1}{10^7}$
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^2$	$\frac{2}{10^7}$
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^3$	$\frac{3}{10^7}$
$\dots$	$\dots$
$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$	1

Tabla 2. Condición necesaria y suficiente para que el sistema de logaritmos de Napier posea una base. [6].

En la tabla 2 se aprecia que 1 es el logaritmo de $\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ que es aproximadamente igual a e^{-1} con $e = 2.718 \dots$ Por lo tanto, la base de los logaritmos de Napier, tal como se modifica aquí, es el recíproco de la base en el sistema natural de logaritmos. El gran descubrimiento de Napier sucede durante el año de 1614, en su trabajo titulado “Mirifici logarithmorum canonis descriptio”. Es interesante leer una nota que escribió al final de sus tablas de logaritmos y que da cuenta del enorme esfuerzo de este trabajo maravilloso: “la elaboración de esta tabla, que debería haberse logrado con el trabajo y la ayuda de muchos calculistas, se ha complementado

por la fuerza y la industria de uno solo, así que no será sorprendente que muchos errores se hayan infiltrado en ella”.

En su obra, Napier explicó la naturaleza de los logaritmos y calculó una tabla logarítmica de senos naturales de un cuadrante, con precisión de minuto a minuto. En 1619 se publicó otra obra de él, titulada “Mirifici Logarithmorum canonis constructio”, como un trabajo póstumo en el que se explica a detalle su método de cálculo de logaritmos. Fue republicado en latín en 1895 en París, y existe una traducción al inglés, realizada por W. R. Macdonald publicada en Edimburgo en 1889. La obra de Napier fue muy bien recibida y apreciada tanto en Inglaterra como en el continente europeo, impresionó a muchos y causó admiración en otros tantos, como es el caso de Henry Briggs (1561 – 1630), quien en la época de Napier era profesor de geometría en el Colegio Gresham de Londres, y posteriormente fue catedrático en Oxford. En sus memorias se puede leer el siguiente texto: “Neper, señor de Markinston ha puesto mis manos y mente a trabajar con sus nuevos y maravillosos logaritmos. Espero encontrarme con él este verano, si las cosas van bien, pues nunca he visto un libro que me haya causado tanto placer y haya despertado mi admiración”. Briggs fue un matemático muy hábil, además de ser uno de los pocos intelectuales de esa época que no eran seguidores de la astrología, llegando a ser un personaje muy satírico argumentando que era un sistema de conceptos infundados, mientras que Napier fue ferviente seguidor de esta pseudo-ciencia.

Es así como Briggs parte de Londres para reunirse con el filósofo escocés. La escena de su encuentro es bastante interesante, pues Briggs se retrasó en su viaje por lo que Napier se quejó ante un amigo en común, justo cuando Briggs llamaba a la puerta del edificio de reunión, entró él y pasaron casi quince minutos admirándose el uno al otro sin decir una sola palabra, hasta que por fin Briggs se decidió a iniciar la conversación: “mi señor, he realizado este largo viaje con el propósito de conocerle en persona y saber cómo es que con su brillante ingenio ha descubierto esa maravillosa herramienta de ayuda para los astrónomos, a saber, los logaritmos, y al estar junto a usted me surge la pregunta acerca del porqué a nadie se le ocurrió algo como esto, pues ahora que lo ha publicado, la mayoría observamos que el concepto es bastante fácil de comprender y utilizar” (Memorias de John Napier, por Mark Napier, 1834, citado por Cajori[6]). En esa reunión Briggs le sugirió a Napier la ventaja que resultaría el conservar el cero para el logaritmo correspondiente al seno entero, pero dejando el valor de 10^7 para el logaritmo de la décima parte de ese mismo seno, es decir $5^\circ 44' 22''$, a lo que Napier comentó que ya había pensado en ese cambio y además señaló una ligera mejora a su idea, por ejemplo que cero debería ser el logaritmo de 1 y 10^7 el logaritmo del seno completo, haciendo así la característica de los números mayores que la unidad, positiva y no negativa, como lo había sugerido Briggs, admitiendo este último ser más conveniente. Por ello, el descubrimiento de los “logaritmos de Briggs” fue pensada por estos dos personajes de manera independiente.

La gran ventaja de este nuevo sistema es que su progresión fundamental sea ajusta a la base 10, nuestro sistema de numeración convencional. Briggs dedicó todo su esfuerzo a la construcción de las tablas basado en este nuevo argumento. Napier murió en 1617 pero con el consuelo de haber encontrado en Briggs un hábil amigo en quien confiar el término de su obra. En 1624 Briggs publicó su Arithmetica logarithmica que contenía los logaritmos a 14 decimales de los

números del 1 hasta 20,000 y de 90,000 hasta 100,000. La parte faltante, de 20,001 hasta 89,999 la completó el ilustre sucesor de ambos, Adrian Vlacq de Guoda, Holanda, pues publicó en 1628 una tabla de logaritmos a partir del 1 y hasta 100,000, de los que 70,000 los calculó él mismo. La primer publicación de los logaritmos de Briggs de funciones trigonométricas se realizó en 1620 y es debida a Edmund Bunter, colega de Briggs, quien encontró los logaritmos para senos y tangentes para cada minuto, con siete decimales y además propuso los términos coseno y cotangente. Briggs dedicó los últimos años de su vida a calcular los logaritmos que llevan su nombre más extensos de las funciones trigonométricas, sin embargo la muerte le sorprendió en 1630 dejando su trabajo inconcluso.

Lo terminó un inglés de nombre Henry Gellibrand y los publicó Vlacq con sus propios recursos económicos. Briggs dividió un grado en 100 partes, pero como Vlacq publicó las tablas trigonométricas construidas utilizando el viejo sistema de división sexagesimal, la innovación de Briggs permaneció sin reconocimiento. Tanto Briggs como Vlacq publicaron cuatro obras fundamentales y cuyos resultados no han sido igualados por calculistas posteriores.

Como ya se mencionó, el sistema de logaritmos publicado por Napier no es el mismo que el actual sistema de logaritmos naturales. La primera aparición de este sistema (con la omisión del punto decimal) es en un “Appendix”, anónimo publicado en la edición de 1618 de Edward Wright correspondiente a la traducción de la obra de Napier, el Descriptio. Este interesante Apéndice explica métodos de interpolación y muy probablemente lo escribió William Oughtred. Dicha interpolación se efectuaba con la ayuda de una pequeña tabla agregada a la publicación y que contenía los logaritmos de 72 valores para el seno. En este trabajo, aparece el $\log 10 = 230\,2584$ que en notación moderna se escribe 2.302584 . Con frecuencia se ha afirmado que los logaritmos naturales aparecen en un texto titulado “Nuevos Logaritmos”, publicado en Londres por un profesor de matemáticas de esa ciudad de nombre John Speidell en 1619. El texto contiene los logaritmos de los senos, tangentes y secantes. Sin embargo, los valores impresos en estas tablas no eran exactamente logaritmos naturales, debido a las complicaciones derivadas del hecho de que los logaritmos y las funciones trigonométricas aparecen ahí como números enteros, aunque estas últimas no fueron obtenidas directamente por Speidell.

Por ejemplo, Napier escribe que el seno de $30' = 87265$ con un radio de 10^7 . En la actualidad el valor de $30' = 0.0087265$. Así, el logaritmo natural de este valor fraccionario es aproximadamente 5.25861 . Agregando 10 unidades a este valor obtenemos 5.25861 y Speidell escribió en sus tablas: $\log \sin 30' = 525\,861$. Entonces la relación entre los logaritmos naturales y aquellos en las tablas trigonométricas de Speidell se muestra en la expresión:

$$Sp. \log x = 10^5 \left(10 + \log_e \frac{x}{10^5} \right) \quad (2)$$

Para las secantes y posteriormente las semi- tangentes, se omitió la adición de 10 unidades. En la tabla de logaritmos de Speidell el logaritmo tangente de $89^\circ = 4.04812$. Con relación a este autor se puede consultar el artículo titulado “Tables” publicado en Quarterly Journal of Pure and Appl. Math., Vol. 46, 1915, pp. 174 – 178 [6] A partir de la propuesta de Speidell es evidente que no existieron razones teóricas pero

si prácticas que lo motivaron a modificar las tablas propuestas por Napier, pues su idea era simplificar el uso de los logaritmos y que fuesen accesibles a todas aquellas personas que no estuviesen familiarizadas con las reglas algebraicas de la adición y sustracción y que necesitasen utilizarlas, además evitan el uso de los números negativos; sin embargo Speidell dejó ir la oportunidad de adaptar el sistema de numeración árabe, que sí incorporó Briggs en sus tablas de logaritmos.

El hijo de John Speidell, de nombre Euclid Speidell afirmó que su padre en sus últimos años aceptó que los logaritmos decimales o de Briggs eran la mejor propuesta para estandarizar el uso de los logaritmos. Hubo seis ediciones de su obra entre 1620 y 1628, aunque no todas realizadas por él. en su obra titulada “Breve tratado de Triángulos Esféricos” hace pública la queja dirigida a todos aquellos editores que habían publicado su obra de logaritmos sin algún cambio, alteración o corrección y que en los prefacios de estas ediciones lo desacreditan por no haber hecho esta labor (es decir, más que editores, fueron simples copistas de su obra): “Si eso puedes enmendarlo, así harás más arte; pero si no entonces: felicítalo. De lo contrario, déjalo en paz”.

Parece que las críticas de muchos de sus editores se fundaban en que él no había estudiado en las universidades de Oxford o Cambridge, sin embargo es notorio que el conocimiento generado y que proviene de una excelente intuición y un gran proceso de observación, no necesariamente requiere una formación universitaria (y ha sido uno de los argumentos en que se ha basado el abordaje del estudio de los logaritmos en la asignatura Los Números y sus Relaciones en la ENSM), además que se recalca el hecho de que Speidell se dedicó a la docencia de la matemática, por ello, estos dos hechos, la intuición y la observación son ingredientes o condiciones importantes en toda persona interesada en la enseñanza de la matemática, además, desde luego el conocimiento formal de los objetos matemáticos y su historicidad. En su edición de 1622 de sus “Nuevos Logaritmos” él publicó también los valores logarítmicos de los números 1 al 1000 y que son auténticamente logaritmos naturales, excepto por la omisión del punto decimal. Su pequeña Tabla de Logaritmos de 1618, con 72 valores logarítmicos, acredita al trabajo de Speidell como el primero en su género que contiene logaritmos naturales. Este es un excelente ejemplo de los esfuerzos realizados con el paso del tiempo para superar parcialmente los inconvenientes generados con el uso de diferentes escalas en el sistema de medidas utilizados en Inglaterra, que a pesar de no adaptar el sistema decimal, al final de cada página, Speidell inserta los logaritmos de 100 y 1000 para su uso en fracciones decimales. El sistema más elaborado de tablas de logaritmos naturales se debe a Wolfram, quien publica los logaritmos naturales de los números 1 a 10,000 con 48 decimales, que se publicaron en 1778 en la imprenta Sammlung de Schultze.

Este autor fue teniente de artillería alemán y sus tablas son el producto de un trabajo extremadamente laborioso; en la Cyclopedia de Rees en su edición de 1819, se ha localizado una tabla de esta naturaleza en el artículo titulado “Logaritmos Hiperbólicos”; sin embargo, la tabla de logaritmos naturales más completa, en cuanto a rango, la publicó el gran calculista alemán Zacarías Dase en la ciudad de Viena en 1850. Es interesante hacer notar que todos los primeros esfuerzos se enfocaron a crear los logaritmos como una herramienta poderosa para ser utilizada en los procesos de cálculo aritmético con números muy grandes o pequeños, más que en

crear una teoría bella y simple, por lo que es un hecho curioso que los primeros sistemas logarítmicos son comparativamente débiles en la adaptación práctica, pero de un profundo interés teórico. En un hecho que Napier casi descubre los logaritmos naturales cuyo módulo es la unidad, sin embargo, este proceso estaba reservado para el trabajo de Speidell.

El único posible rival de Napier en el descubrimiento de los logaritmos pudo haber sido el suizo Joost Bürgi (o Justus Byrgius, 1552 – 1632), quien en su juventud se dedicó a la relojería para después colaborar en los observatorios de Kessel y Praga, ahí con Kepler. Fue un matemático de alto nivel, pero no pudo llegar a publicar sus investigaciones. Kepler le atribuye el descubrimiento de las fracciones decimales y de los logaritmos.

Bürgi sí pudo publicar una sencilla tabla de logaritmos seis años después que apareciera el Descriptio de Napier, pero parece que pudo haber concebido esta idea e incluso haber construido esa tabla mucho antes que Napier lo hiciera, este hecho se basa en un artículo publicado por Gerhardt en Gesch. D. Math. In Deutschlanden 1877, pp. 75 y 119 [6], sin embargo se negó a publicar los resultados de su investigación y lo hizo hasta después de la publicación de los logaritmos de Napier (en gran parte por la influencia de Kepler) pero fueron conocidos y admirados en toda Europa. Los métodos para calcular logaritmos utilizados por Napier, Briggs, Kepler, Speidell y Vlacq son aritméticos y deducibles a partir de la Teoría de las Razones Aritméticas. Tiempo después de que se calcularon y publicaron las grandes tablas logarítmicas, autores como Gregoy St. Vincent, Newton, Nicolaus Mercator, entre otros, descubrieron que estos cálculos se podían realizar más fácilmente utilizando las series infinitas.

En su estudio sobre las cuadraturas St. Vincent (1584 – 1667) encontró en 1647 la importantísima propiedad de la hipérbola equilátera que unía el espacio hiperbólico entre las asíntotas y su relación con los logaritmos naturales, de ahí que estos logaritmos se conozcan también como hiperbólicos.

Con base en esta propiedad, Mercator dedujo en 1668 las series logarítmicas y además mostró que la construcción de las tablas logarítmicas se puede reducir por series a la cuadratura de los espacios hiperbólicos (ver los artículos mencionados en la Enciclopedia Británica[15] y el Diccionario Hispano – Americano, para más detalles).

III. EL OBJETO MATEMÁTICO DE ESTUDIO. LOGARITMOS

i) LA EXISTENCIA DE LOGARITMOS.

Por el hecho que las funciones logarítmicas no son algebraicas, se catalogan como trascendentes [20] [21]. Ahora, una primera idea es la existencia de los logaritmos.

Teorema 1. Dado un número real $b > 1$ y cualquier número positivo N , entonces siempre existe un número $q \in \mathbb{R}$, llamado el logaritmo de base b de N , tal que $b^q = N$.

Este teorema es parte de la metodología para probar la existencia de los logaritmos, así que para realizar la prueba es necesario construir el número q y para ello probamos primero el siguiente resultado preliminar [22].

Lema 1. Dado un número $b > 1$ y cualquier número positivo N , es posible escribir una secuencia de fracciones decimales de la forma $q_0 = p_0$, $q_1 = p_0 + \frac{p_1}{10}$, $q_2 = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{100}$, ...

De tal manera que b^{q_n} se aproxima a N mientras n incrementa.

Prueba: Debido a que $N > 0$, entonces hay un único entero p_0 , no necesariamente positivo, tal que:

$$b^{p_0} \leq N < b^{p_0+1} \quad (3)$$

Entonces:

$$1 \leq \frac{N}{b^{p_0}} < b \quad (4)$$

Por lo tanto:

$$1 \leq \frac{N^{10}}{b^{10p_0}} < b^{10} \quad (5)$$

Hay un entero único p_1 , $0 \leq p_1 \leq 9$, tal que:

$$b^{p_1} \leq \frac{N^{10}}{b^{10p_0}} < b^{p_1+1} \quad (6)$$

De esta última expresión, se tiene que:

$$1 \leq \frac{N^{10}}{b^{10p_0+p_1}} \leq \frac{N^{10}}{b^{10q_1}} < b \quad (7)$$

Es por ello por lo que:

$$1 \leq \frac{N^{100}}{b^{100q_1}} < b^{p_2+1} \quad (8)$$

Y consecuentemente, se tiene:

$$1 \leq \frac{N^{100}}{b^{100q_1+p_2}} = \frac{N^{100}}{b^{100q_2}} < b \quad (9)$$

Evidentemente este proceso puede continuarse hasta obtener:

$$1 \leq \frac{N^{10^n}}{b^{10^n q_n}} < b \quad (10)$$

Con base en lo anterior, se obtiene lo siguiente:

$$1 \leq \frac{N}{b^{q_n}} < b^{10^{-n}}, 0 \leq \left(\frac{N}{b^{q_n}}\right) - 1 < b^{10^{-n}} - 1 \\ 0 \leq N - b^{q_n} < b^{q_n} (b^{10^{-n}} - 1) \leq N (b^{10^{-n}} - 1) \quad (11) \blacksquare$$

Es evidente que el Lema 1 queda demostrado al suponer que $b^{10^{-n}}$ se aproxima a 1 mientras el entero n incrementa. De hecho, esto es una consecuencia de esta igualdad $\lim_{x \rightarrow 0} b^x = b^0 = 1$. A continuación es necesario definir q y b^q de la siguiente manera:

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n, \quad b^q = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{q_n} \quad (12)$$

Por lo tanto, se tiene que:

$$N = b^q \text{ equivalente a } q = \log_b N \quad (13)$$

Es importante hacer notar que la relación (11) es suficiente y necesaria para realizar las aplicaciones de los logaritmos, por ejemplo, se puede construir una tabla logarítmica con 5 valores decimales utilizando la relación mencionada y haciendo $n = 6$.

ii) UNA PROPIEDAD INTERESANTE DEL LOGARITMO.

Un límite importante muy vinculado con los logaritmos es el siguiente[7]:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \quad (14)$$

Para deducir las propiedades de los logaritmos es muy frecuente utilizar la siguiente expresión:

$$\log x = \int_1^x t^{-1} dt \quad (15)$$

Con base en la definición de integral es fácil mostrar (inclusive, a través de la intuición, probar por medio de áreas) que para $x > 1$, se tiene:

$$0 < \log x < x \quad (16)$$

Si $\log x = 2 \log x^{1/2}$, se tiene lo siguiente:

$$0 < \frac{\log x}{x} < \frac{2x^{1/2}}{x} = 2x^{-1/2} \quad (17)$$

Por lo que el límite es fácilmente deducido. Además se debe notar que la sustitución $x = t^{-1}$ también se relaciona con $\lim_{t \rightarrow 0} t \log t = 0$.

iii) LA PRUEBA DE LA ECUACIÓN DE EULER.

Es de todos conocido que uno de los más grandes misterios de la matemática se relaciona con la expresión conocida como la “ecuación de Euler”: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Esta expresión se obtiene a partir del uso de series infinitas, pero se han hecho muchos intentos para llegar a ella sin recurrir a esta metodología, por lo que es muy deseable que una prueba rigurosa pero sencilla de la expresión de Euler esté al alcance de los matemáticos[8]. Un aspecto importante basado en la

lógica de la estructura matemática es la necesidad de definir este objeto abstracto y como consecuencia, ciertas propiedades se le deben atribuir, ya que de otro modo, cualquier prueba falla de inmediato.

Definición 1. e^{ix} es una función de valor complejo de una variable real x . Con las propiedades:

$$(1) \quad e^{ix} = 1 ;$$

$$(2) \quad \frac{de^{ix}}{dx} = ie^{ix}$$

Teorema 2. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

Prueba. Sea $e^{ix} = \rho(\cos \theta + i \sin \theta, 0 \leq \theta < 2\pi; \rho \geq 0$. Por la propiedad (1) de la definición se tiene que:

$$x = 0 \rightarrow \rho = 1 \wedge \theta = 0$$

Por la propiedad (2) de la misma definición:

$$\frac{d\rho}{dx}(\cos \theta + i \sin \theta) + \rho(-\sin \theta + i \cos \theta) \frac{d\theta}{dx} = i\rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Igualando las partes real e imaginaria, se obtiene:

$$\frac{d\rho}{dx} \cos \theta - \rho \sin \theta \frac{d\theta}{dx} = -\rho \sin \theta$$

$$\frac{d\rho}{dx} \sin \theta + \rho \cos \theta \frac{d\theta}{dx} = \rho \cos \theta$$

Al resolver, se tiene:

$$\frac{d\rho}{dx} = 0; \quad \rho \frac{d\theta}{dx} = \rho$$

Por ello: $\rho = 1; \quad \theta = x$. ■

Además, se hace notar que un tratamiento bastante riguroso de la Definición 1 lo hicieron otros autores, como Geoffrey Hardy, E. T. Whittaker y G. N. Watson (Allendoerfer, 1948). El primero de ellos, la describe en la quinta edición de su texto (Hardy, 1928):

Definición 2. Sea $\zeta = \xi + i\eta$ cualquier número complejo. Se define $\text{Log } \zeta$ o el logaritmo general de ζ con la ecuación:

$$\text{Log } \zeta = \int_C \frac{dz}{z}, \quad (18)$$

Donde C es una curva que inicia en 1 y termina en ζ y que además no pasa por el origen.

Definición 3. Si cualquier valor del logaritmo de z es igual a ζ , entonces z es la exponencial de ζ , es decir:

$$z = \exp. \zeta$$

De tal modo que, $z = \exp. \zeta \rightarrow \zeta = \text{Log } z$. Además es verdadero que para cualquier valor de z corresponden infinitos valores diferentes de ζ .

Teorema 3. La función exponencial $\exp. \zeta$ es una función de valor único de ζ .

Prueba.

Supongamos lo siguiente:

$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ son, ambos, valores de $\exp. \zeta$.

Entonces, se tiene que $\zeta = \operatorname{Log} z_1 = \operatorname{Log} z_2$, y también: $\log r_1 + i(\theta_1 + 2m\pi) = \log r_2 + i(\theta_2 + 2n\pi)$, en que $m, n \in \mathbb{Z}$, lo que implica que

$\log r_1 = \log r_2$, $\theta_1 + 2m\pi = \theta_2 + 2n\pi$.

Así, $r_1 = r_2$. Ahora, θ_1 y θ_2 difieren por un múltiplo de 2π . De ahí que $z_1 = z_2$. ■

Corolario 1. $\zeta \in \mathbb{R} \rightarrow \exp. \zeta = e^\zeta$. Además $z = e^\zeta \rightarrow \log z = \zeta$, es decir que uno de los valores de $\operatorname{Log} z = \zeta$. De ahí que $z = \exp. \zeta$.

Sea $\zeta = \xi + i\eta \wedge z = \exp. \zeta = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$.

Entonces $\xi + i\eta = \operatorname{Log} z = \log r + i(\theta + 2m\pi) \mid m \in \mathbb{Z}$. De lo anterior se deduce que:

$\xi = \log r$, $\eta = \theta + 2m\pi$, expresión equivalente a:

$r = e^\xi$, $\theta = \eta - 2m\pi$; y en consecuencia

$\exp. (\xi + i\eta) = e^\xi (\cos \eta + i \operatorname{sen} \eta)$. Lo que justifica el valor de $\exp. \zeta$.

iv) LAS FUNCIONES HIPERBÓLICA Y EXPONENCIAL.

Un muy interesante tratamiento de las funciones trascendentales elementales lo realizó Hurwitz y lo publicó en el *Mathematische Annalen*, Vol. 70, 1911, y lo tituló: “Über die Einführung der elementaren transzendenten Funktionen in der algebraischen Analysis” o “Sobre la Introducción de las funciones trascendentales elementales en el Análisis algebraico”. El método utilizado por el Profesor Hurwitz es muy similar al del Profesor Huntington en su artículo titulado “An elementary Theory of the Exponential and Logarithmic Functions” o “Una Teoría Elemental de las funciones exponencial y logarítmica”, publicado en el *Monthly* en septiembre de 1916 (pp.241 – 246), con la diferencia que el primero discutió la función $\log x$ para así derivar las secuencias para la definición de e^x . Otra diferencia entre ambas propuestas es que Huntington simplificó los detalles con base en que la desigualdad $(1+d)^m > 1+md$ no era requerida[9], lo que hace a la prueba más simple ya que depende parcialmente del Teorema del Binomio y también se basa en una prueba adicional para un caso en particular. La ventaja se obtiene al utilizar secuencias en las que cada exponente duplica el valor del anterior, por lo que consecuentemente es muy fácil probar las características tanto creciente como decreciente de las dos secuencias, relacionándose así con la desigualdad mencionada.

Dadas las siguientes secuencias, basadas en el trabajo de Huntington:

$$(A) \quad 1+x, \left(1+\frac{x}{2}\right)^2, \left(1+\frac{x}{4}\right)^4, \left(1+\frac{x}{8}\right)^8, \dots, \left(1+\frac{x}{m}\right)^m, \left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m}, \dots,$$

$$(B) \quad (1-x)^{-1}, \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}, \left(1-\frac{x}{4}\right)^{-4}, \left(1-\frac{x}{8}\right)^{-8}, \dots, \left(1-\frac{x}{m}\right)^{-m}, \left(1-\frac{x}{2m}\right)^{-2m}, \dots \quad (19)$$

Donde $x \in \mathbb{R}$ y al considerar solamente los casos para los que $m > |x|$, se prueba que (a) la secuencia (A) incrementa;

(b) la secuencia (B), decrece; (c) cada término en la secuencia (A) es menor que el correspondiente en la secuencia (B) y la diferencia se aproxima a cero mientras m incrementa.

Prueba. Se tiene que para cualquier valor real de x :

$\left(1+\frac{x}{2m}\right)^2 = 1 + \frac{x}{m} + \frac{x^2}{4m^2} > 1 + \frac{x}{m}$, y debido a que $1 + \frac{x}{m}$ es positivo, también se tiene que:

$\left(1+\frac{x}{2m}\right)^{2m} > \left(1+\frac{x}{m}\right)^m$. Eso prueba (a). Para (b) se utiliza la desigualdad anterior y se sustituye x por $-x$ y se revierte la desigualdad resultante. Para el tercer caso, (c), se tiene que:

$$\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-m} - \left(1+\frac{x}{m}\right)^m = \left(1-\frac{x}{m}\right)^{-m} \left[1 - \left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)^m\right] < \left(1-\frac{x}{m}\right)^{-m} \frac{x^2}{m}, \text{ siempre y cuando } m > x^2.$$

Se observa con facilidad que cada uno de los dos factores a la derecha de la desigualdad es positivo, y esto basta para probar la primera parte de (c). Ahora, esta desigualdad resulta ser verdadera al reemplazar x en (A) por $-\frac{x^2}{m}$ y utilizando (a).

Debido a que el factor $\left(1-\frac{x}{m}\right)^{-m}$ decrece y que $\frac{x^2}{m}$ se aproxima a cero mientras que m incrementa, la segunda parte de (c) es verdadera. ■

Si se nombra al límite común de las secuencias (A) y (B) $\exp. x$, se generan las siguientes desigualdades:

$$1+h < \left(1+\frac{h}{m}\right)^m < \exp. h < \left(1-\frac{h}{m}\right)^{-m} < 1-h^{-1}, \quad |h| < 1, m = 2^t \quad (20)$$

Y cuya consecuencia son las propiedades restantes de la función. Así, debido a que:

$$\frac{\left(1+\frac{x}{m}\right)^m \left(1+\frac{y}{m}\right)^m}{\left(1+\frac{x+y}{m}\right)^m} = \left[1 + \frac{xy}{m(m+x+y)}\right]^m \quad (21)$$

Además, si se toma el valor de m tan grande que $\frac{xy}{(m+x+y)} = h$, entonces es menor que la unidad en valor absoluto, así que las desigualdades en (20) muestran que:

$$\frac{\exp. x \exp. y}{\exp. (x+y)} = 1 \quad (22)$$

También es importante señalar que la derivada de $\exp. x$ es una consecuencia, a la vez, de las mismas desigualdades. Por ello, es de gran utilidad el comenzar las secuencias (A) y (B) con $1+x$ y $(1-x)^{-1}$, respectivamente.

IV. LA PROBLEMÁTICA.

i) EL TEMA DE LOGARITMOS EN LA ESCUELA SECUNDARIA MEXICANA

En 1926 se crea en México la Dirección de Enseñanza Secundaria y para 1928 había seis secundarias federales en funciones. Desde entonces y hasta 1982 inclusive, el tema de logaritmos se ofrecía a los estudiantes de ese nivel educativo en el tercer grado. Uno de los primeros libros de texto[24] escritos especialmente para su uso en las aulas incluía como último tema el estudio de logaritmos, con subtemas como son los preliminares, las propiedades generales, la obtención de los logaritmos vulgares, aplicaciones de los logaritmos y consideraciones complementarias. Este contenido temático prevaleció con alguna que otra modificación con base en las diferentes actualizaciones de los planes y programas de estudio oficiales[25][26]. Para 1968 la Dirección General de Segunda Enseñanza, dependiente de la Secretaría de Educación Pública realiza una excelente actualización de los planes y programas de estudio con un verdadero carácter de la matemática moderna, que entonces estaba en boga en muchos países desarrollados y que incluía temas de lógica matemática además del proceso de la demostración de los teoremas que se abordaban, entre otras innovaciones, que en los planes y programas anteriores no se trabajaban, es decir, que se formaban “matemáticos junior”, si se permite el término, pues antes de esta propuesta el enfoque del estudio de la matemática se centraba en el proceso algorítmico, estudiando la asignatura como una herramienta de cálculo y medición en lugar de abordarla como un lenguaje abstracto[27]. El tema de logaritmos se estudiaba en la segunda unidad del programa de tercer grado[28] y contenía cuatro subtemas: definición de logaritmos; sus propiedades; tablas logarítmicas; su relación con el cálculo numérico. La obra citada contiene numerosas definiciones y muchos teoremas con sus respectivas demostraciones (y fue publicada como un trabajo en equipo por parte de investigadores del Instituto de Matemáticas de la UNAM y profesores – investigadores de la Escuela Normal Superior de México). Sin embargo, para junio de 1981 se publican los Planes y Programas de estudio para la Educación Media Básica de 1981; pero el tema de logaritmos ya no está incluido en tercer grado de este nivel educativo ni mucho menos en primero y segundo grados, y aunque todavía se mantiene el estudio de la lógica y conjuntos siempre en la primera unidad de los tres grados, se va dejando de lado el estudio axiomático que había florecido trece años antes, y también se excluyen tópicos importantes como el tema de radicales en tercer grado. Para 1993, el Plan y Programas de estudio para la educación básica, nivel secundaria, da inicio a un giro en la educación matemática de ese nivel educativo[12] priorizando el desarrollo de habilidades matemáticas; competencias matemáticas (Planes de estudio 2006, 2011 y 2018) excluyendo aun más muchos contenidos matemáticos importantes, para dar preferencia a la contribución del desarrollo humano integral, con un enfoque de la asignatura de matemáticas en la resolución de problemas, pero descuidando en mucho el tratamiento axiomático y lógico propios de la matemática. Este recuento histórico concluye con la primera problemática localizada en los estudiantes de la LESM: el desconocimiento del tema de logaritmos, en la mayoría de los estudiantes, o falta de profundidad en su estudio, en algunos casos; y en una minoría, un tratamiento puramente algorítmico sin un acercamiento axiomático al objeto matemático. Una explicación al respecto se basa en el hecho de que aquellos

jóvenes que cursaron la asignatura de Los Números y sus Relaciones en tercer semestre de su carrera, no habían trabajado con logaritmos en la escuela secundaria, pues la gran mayoría han cumplido los 19 años de edad al ingresar a este tercer semestre, por lo que, de las 19 generaciones que han cursado esta asignatura, casi todos los estudiantes han cursado el nivel secundario con los planes y programas de estudio 1981[29] y posteriores. Además, dada la gran variedad de planes y programas de estudio correspondientes a la Educación Media Superior, hasta antes de las reformas educativas correspondientes, ha dificultado también un estudio más formal del tema en ese nivel educativo, previo al nivel superior. Además, es justamente en este nivel que muchos programas educativos relacionados con matemáticas, ingenierías, ciencias, economía y algunas ciencias sociales incluyen este tema en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral en el semestre correspondiente. Sin embargo y en este sentido, es prioritario que el estudiante de algún programa educativo dedicado a la enseñanza de la matemática deba conocer este tema, pues además de contribuir al desarrollo de su pensamiento matemático, se convierte en un requisito necesario, con un argumento: el saber guiar el proceso de aprendizaje y el saber comunicar el manejo de las fracciones decimales y su uso como herramienta de cálculo.

ii) EL ABUSO EN EL USO DE LAS CALCULADORAS ELECTRÓNICAS.

El auge del desarrollo tecnológico ha llegado a casi todo el quehacer humano y de forma natural se ha incrementado su uso en todos los niveles educativos. De los dispositivos tecnológicos, los electrónicos han tenido mayor preferencia por parte de los estudiantes durante los últimos 35 años aproximadamente y su uso se ha vuelto cada vez más común, debido al abaratamiento y la sofisticación de sus componentes.

El primer dispositivo electrónico que ha incursionado en las aulas ha sido la calculadora electrónica, cuyos primeros modelos empiezan a circular a mediados de los años 70 del siglo pasado, con funciones simples propias para el cálculo aritmético.

Al paso del tiempo se fueron incorporando los dispositivos que ahora se conocen como calculadoras científicas, ya con funciones más avanzadas y poderosas, además que su tamaño y costo han sido cada vez más reducidos significativamente. En la década de los años 80 del siglo anterior se incrementó su uso, primeramente en las aulas de nivel superior, y poco a poco han llegado a las aulas de educación básica. Sustituyeron eficazmente a la regla de cálculo y las tablas de valores de diversas funciones matemáticas. Sin embargo, poco a poco los usuarios de los diferentes niveles educativos han modificado su uso en el sentido de evitar el menor esfuerzo para realizar cálculos aritméticos, geométricos, algebraicos, trigonométricos, relativos al cálculo diferencial e integral, estadísticos, etc., por lo que ha llegado a ser un abuso en su uso.

El trabajo con logaritmos no es la excepción, además de que el propio desarrollo tecnológico de estos dispositivos ha relegado prácticamente recurrir a los logaritmos, pues los dispositivos ya incluyen funciones que permiten encontrar valores numéricos que antaño sólo era posible con ayuda de los logaritmos. En un hecho que en el aspecto laboral se justifique su uso, pues el ahorro de tiempo y esfuerzo humano finalmente reduce costos a las empresas en sus diferentes departamentos, por lo que la interacción hombre – máquina se vuelve necesaria. Pero en el salón de clase debe ser diferente, sobre

todo en el salón de clase de matemática, en el que el desarrollo del pensamiento crítico, creativo y reflexivo es base para generar habilidades y competencias matemáticas, aunque en otras áreas del conocimiento, como la física, la química, la biología, las finanzas, la medicina, etc., en las que el enfoque de aprendizaje es diferente, su uso se justifica. Tanto ha sido este abuso, que en la actualidad existen programas digitales que permiten resolver problemas variados relacionados con diferentes tópicos en matemáticas, ya sin el menor esfuerzo cognitivo por parte de los estudiantes.

El esfuerzo de muchos docentes ha permitido la combinación favorable de estos dispositivos con el proceso educativo en los estudiantes, sin embargo no siempre se tiene consciencia de ello. Esta es la segunda problemática observada en los estudiantes del programa educativo LESM, quienes se han sobre acostumbrado a recurrir a la calculadora científica (digital o en dispositivo físico) para resolver problemas de cálculo o medición evitando así un acercamiento directo con muchos objetos matemáticos.

Aunado a ello, el problema se complica, pues los estudiantes de este programa deben estar frente a grupo guiando y coordinando aprendizajes en el campo matemático, lo que se convierte en una condición necesaria el dominio de este contenido, sin dejar de lado el uso de la calculadora electrónica, pero evitando o moderando recurrir a ella de forma exagerada.

iii) EL TRABAJO CON LOS LOGARITMOS. LA INTERACCIÓN CON LA CALCULADORA.

Uno de los primeros acercamientos al trabajo con logaritmos, es encontrar valores logarítmicos de cualquier número escrito en base diez, debido a la facilidad de lectura y escritura que los estudiantes han adquirido con esta base de numeración.

Cuando los números son mayores que la unidad, no existe el menor problema, tanto al usar tablas como la calculadora, pero cuando se trata de números mayores que cero, pero menores que la unidad, la interpretación de la salida en pantalla en la calculadora científica del cálculo solicitado se vuelve un problema. Por ejemplo:

Número	Logaritmo b_{10}
200	$\log(200)$ 2.3010299956639811952137388947245
20	$\log(20)$ 1.3010299956639811952137388947245
2	$\log(2)$ 0.30102999566398119521373889472449
0.2	$\log(0.2)$ -0.69897000433601880478626110527551
0.02	$\log(0.02)$ -1.6989700043360188047862611052755
0.002	$\log(0.002)$ -2.6989700043360188047862611052755

Tabla 3. Salida en pantalla de calculadora científica de logaritmos de números solicitados.

Como se observa en la Tabla 3, para aquellos números mayores que la unidad, la mantisa o parte decimal fraccionaria del logaritmo correspondiente siempre es la misma, y lo único que varía es la característica o parte entera y que representa la posición del número en la base decimal. Así por ejemplo, el

logaritmo de 200 tiene un valor de característica de 2 enteros, pues 200 está entre 100 o 10^2 y 1000 o 10^3 , y de ahí la parte decimal fraccionaria. Sucede lo mismo con 20 y 2. Pero el patrón cambia cuando el número es mayor que cero, pero menor que la unidad. Así para el logaritmo de 0.2, la calculadora muestra en pantalla 0.6989... indicando que 0.2 es menor que 10^0 , pero mayor que 10^{-1} , de ahí el signo negativo junto al cero como valor de la característica. Además, la parte decimal fraccionaria cambia de valor, en lugar de mantener el patrón constante de valor 0.3010... ahora es 0.6989 y que también es constante para los números 0.02 y 0.002, es decir, la calculadora da como salida el número complementario a la unidad del valor 0.3010, en otras palabras: $0.6989 + 0.3010 \approx 0.999 \approx 1$.

Para interpretar correctamente el resultado mostrado en la calculadora de logaritmos de números mayores que cero pero menores que la unidad, se debe observar que el signo negativo junto al valor de la característica debe entenderse como la posición en el sistema decimal inmediatamente inferior al valor mostrado, así cuando muestra en pantalla -0.6989 debe entenderse que corresponde a $\bar{1}$ (escrito convencionalmente pues indica que sólo la característica es negativa, pues la mantisa siempre es positiva) y si se conserva el signo negativo a la izquierda del número fraccionario realmente indica que toda la cantidad es negativa; para interpretar la mantisa, debe aplicarse la propiedad del inverso aditivo y esta resta o diferencia será el valor correcto del logaritmo del número solicitado, en nuestro ejemplo: $1 - 0.6989 \approx 0.3010$. Entonces, se tiene que:

Número	Logaritmo en pantalla	Interpretación
0.002	-2.6989....	$\bar{3}.3010 \dots$
0.3284	-0.4835...	$\bar{1}.5165 \dots$
0.000056	-4.2518	$\bar{5}.7482 \dots$
0.000000781	-6.1073...	$\bar{7}.8927 \dots$

Tabla 4. Relación entre la salida en pantalla de una calculadora científica y la interpretación de este resultado para obtener el logaritmo correcto.

La tabla 4 permite analizar que el proceso de anotar un valor característico menor al que arroja el dispositivo electrónico en la columna correspondiente a la interpretación se válida al razonar que este valor realmente corresponde a la posición del primer dígito significativo; así al número 0.000056 el primer dígito significativo (el número cinco) ocupa la quinta posición en la notación decimal desarrollada.

De la misma forma, al número 0.000000781, al primer dígito significativo (el número siete) le corresponde la séptima posición en la notación desarrollada del sistema decimal. Además el valor de las mantisas respectivas corresponde a la aplicación de la propiedad del inverso aditivo del valor dado por la calculadora con la unidad. Esta ha sido la tercer problemática observada en los estudiantes de la asignatura Los Números y sus Relaciones.

Dan por hecho que el valor que arroja el dispositivo electrónico es el correcto, y aunque al efectuar los cálculos con estos valores se tenga un resultado correcto a causa del programa mismo de la calculadora, los docentes en formación tienen la obligación de saber explicar qué es lo que sucede cuando se utiliza la tecnología para estos fines.

iv) EL TRABAJO CON LOGARITMOS. APLICACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE CAMPO $\mathbb{R}$.

Con base en las reglas de los exponentes de todo número real positivo, es posible definir los logaritmos de base b (Swokowski, 1982):

$$m = \log_b n \leftrightarrow b^m = n \quad (22)$$

De la expresión anterior, se tiene que:

$$\log_b pq = \log_b p + \log_b q \quad (23)$$

$$\log_b \left(\frac{p}{q}\right) = \log_b p - \log_b q \quad (24)$$

$$\log_b p^r = r \log_b p \quad (25)$$

$$\log_b p^{1/r} = \frac{\log_b p}{r} \quad (26)$$

Una vez concluidas las demostraciones de los proposiciones anteriores, el trabajo áulico se continua con la exposición y realización de expresiones variadas. Las dificultades más notorias en los estudiantes se observan al resolver proposiciones de la forma (24) y (26). Por ejemplo, sea la siguiente proposición:

Determinar el valor de $\frac{2}{8}$ utilizando las propiedades de logaritmos. Al sustituir la proposición anterior en (24), se tiene:

$$\log_{10} \left(\frac{2}{8}\right) = \log_{10} 2 - \log_{10} 8 = 0.3010 - 0.9030$$

Con base en la propiedad del inverso aditivo, en un primer momento los estudiantes intentan obtener la diferencia sustrayendo de manera directa. Sin embargo, no toman en cuenta la separación en el proceso de sustracción de la característica y la mantisa. Para ello, como el valor del sustraendo es mayor que el del minuendo, se procede asociando a este último la unidad y proceder:

$$\begin{aligned} 0.3010 + 1 &= 1.3010 \\ 1.3010 - 0.9030 &= 0.3980 \end{aligned}$$

Ahora, como el valor de la característica en la proposición original es 0, es decir 10^0 y por la propiedad de la sustracción, el resultado del logaritmo solicitado es $\bar{1}.3980$, es decir se recorrió un orden a la derecha de la notación desarrollada del sistema decimal (por ser logaritmo en base 10). La explicación se debe al hecho de que se sustrajo una unidad de la característica para asociarla con la mantisa y así poder efectuar la sustracción; pero como se sustrajo esa unidad, ahora el orden disminuye una posición en el sistema de numeración, por ello, el valor de la característica es $\bar{1}$. Sea otra proposición:

Encontrar el valor de la siguiente expresión utilizando logaritmos $\frac{0.0026}{0.047}$.

Por (24), se tiene: $\log_{10} 0.0026 - \log_{10} 0.047 = \bar{3}.4149 - \bar{2}.6720$. El procedimiento es el mismo, es decir se aplican las mismas propiedades que en la proposición anterior, sin embargo muchos estudiantes todavía presentan dificultades. Una causa es el observar valores negativos en las características de esos logaritmos, además de tener que utilizar correctamente el algoritmo de la sustracción. Al realizar

primeramente la sustracción con las mantisas correspondientes, se debe sustraer una unidad de la característica del logaritmo que ocupa el minuendo: $1.4149 - 0.6720 = 0.7429$.

Para completar el resultado, ahora se realiza la sustracción únicamente de las características de los logaritmos, que inicialmente son:

$\bar{3} - \bar{2}$, sin embargo, se sustrajo una unidad de la característica del logaritmo que ocupa el minuendo, es decir: $\bar{3} - 1 = \bar{4}$, ya que “perdió” una unidad o en términos matemáticos cambió su posición un orden anterior al que estaba inicialmente. Esto causa muchísimas confusiones en los estudiantes pues observan que el valor absoluto de este resultado parcial aumenta, cuando en su lógica debería disminuir, sin embargo la explicación hace notar que el valor de la característica se refiere a la posición, como ya se mencionó, que debe ocupar la primer cifra significativa del antilogaritmo en esta operación (recordando que el antilogaritmo es el valor solicitado en la expresión inicial, y se obtiene al elevar la base, en este caso 10, utilizando como exponente sólo la mantisa del resultado, así: $\bar{4} - \bar{2} = \bar{4} + 2 = \bar{2}$, por la propiedad del inverso aditivo aplicado al valor de la característica en el sustraendo. El resultado de la sustracción es: $\bar{2}.7429$. Para encontrar el valor solicitado se procede:

$$10^{0.7429} = 5.5322$$

Como la característica del logaritmo en la sustracción es $\bar{2}$, significa que el primer dígito del valor anterior valor anterior debe estar en el orden o posición 10^{-2} , es decir, en la posición correspondiente a los centésimos. Así, el resultado final es: 0.05322. Al utilizar la calculadora, se obtiene 0.0553, por lo que la diferencia entre ambos valores es del orden de las milésimas, es decir bastante aceptable para fines prácticos.

Otra dificultad que es interesante de analizar se ha observado en proposiciones de la forma (26):

Obtener el valor de $\sqrt[12]{0.002}$ por medio de logaritmos. Al sustituirla en la forma apropiada, queda: $(\log_{10} 0.002)^{1/12} = \frac{\bar{3}.3010}{12}$. La dificultad más notoria en los estudiantes se relaciona con el hecho de intentar aplicar el algoritmo de la división de manera directa, e n el mejor de los casos, en otros existe desconocimiento total del procedimiento.

El proceso es similar al de la sustracción, en cuanto a la separación de valores de las características y las mantisas respectivas, pero en el caso particular de la división, se debe hacer que el valor del índice de la raíz sea el menor divisor del valor de la característica. Como en este caso el valor de la característica es $\bar{3}$, a éste valor se le debe asociar aditivamente con un número tal que al dividirse por 12, se obtenga un número entero. Entonces, tenemos: $[\bar{3} + \bar{9} = \bar{12}]$, que es el menor número que puede ser dividido por 12. Se debe aclarar que en este caso, el valor de la característica es negativo, por ello se asoció aditivamente con un valor negativo.

Ahora, para conservar la igualdad en la expresión logarítmica, este valor agregado $\bar{9}$, también debe agregarse al valor de la mantisa, tomando en cuenta que ésta siempre tiene un valor positivo, así: $0.3010 + 9 = 9.3010$. De esta manera ahora es posible realizar el algoritmo de la división, es decir:

$$\frac{[\overline{3} + \overline{9} = \overline{12}] + 9.3010}{12} = \frac{[\overline{12}] + 9.3010}{12} =$$

$$= \overline{1} + 0.7750 = \overline{1}.7750$$

Ahora sólo es elevar la base 10 al exponente que indica la parte decimal de este logaritmo, y el primer dígito significativo de este resultado debe ocupar el lugar correspondiente a los décimos, o dicho de otra manera, se debe encontrar el antilogaritmo del valor del cociente, entonces:

$$10^{0.7750} = 5.9566$$

Y como la característica indica que el cinco, primer cifra significativa debe estar ocupando el lugar de los décimos, el resultado final del proceso es: 0.5957, que al compararlo con el resultado que arroja directamente la calculadora, ambos resultados coinciden.

Estas son realmente cuestiones básicas pero que han presentado estas problemáticas. Por ello, el diseño y la aplicación de una secuencia de actividades didácticas apropiadas puede contribuir a la solución de esta.

V. LAS SITUACIONES Y METODOLOGÍA DIDÁCTICAS.

Es importante aclarar una diferencia entre las situaciones y la metodología didáctica.

Las primeras son un componente de la Teoría de las Situaciones Didácticas, propuesta por el investigador en educación matemática Guy Brousseau[2] a principios de la década de los 70's de siglo pasado. Su propósito es la interacción social, es decir entre los integrantes de un grupo de estudiantes de matemáticas, incluyendo al docente. Estas tienen un significado sociológico, pues intentan motivar la participación libre y sin prejuicios, fomentar el respeto a las opiniones de los demás, la inclusión (que hoy está muy de moda), la confianza en la participación de los integrantes del grupo, sin temor a ser sujetos de críticas a causa de emitir ideas equivocadas o inclusive a negarse a hablar frente a compañeros, es decir, estas situaciones intentan generar la integración social del grupo y el trabajo en equipo, desde luego enfocado todo ello, a los saberes matemáticos incluidos en los planes y programas de estudio.

Por otro lado, la metodología didáctica de algún tema matemático hace referencia al orden en que deben abordarse los contenidos temáticos, el nivel del discurso escrito utilizado para comunicar las ideas intuitivas, los axiomas, lemas, definiciones, teoremas y sus demostraciones. Además incluye el enfoque propio, que puede ser aquel basado en la resolución de problemas, o el enfoque totalmente axiomático, o aquel que incluye algunas definiciones, teoremas y breves demostraciones, pero gran variedad de ejemplos y ejercicios, el enfoque histórico que es de gran importancia para la apropiación de un contenido matemático, pues bien abordado, se parte también de la intuición para concluir en la axiomatización en un lenguaje moderno. Existen muchas propuestas sobre metodología didáctica de temas matemáticos y todas son excelentes. Para el trabajo áulico con el tema de logaritmos se decidió seguir la metodología didáctica propuesta por A. Doneddu[14].

i)SITUACIONES DIDÁCTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA.

Varias han sido las técnicas de enseñanza utilizadas con los estudiantes de la LESM desde el inicio del Plan y Programas de Estudio 1999. Una de ellas ha tenido buena aceptación por parte de los estudiantes de este programa educativo, y que a su vez, durante las jornadas de práctica docente y la realización del servicio social frente a grupos de secundaria, la han replicado obteniendo buenos resultados.

A partir del ciclo escolar 2011 – 2012 se ha destacado el uso de las situaciones didácticas (Brousseau, 1997) como una técnica de interacción, comunicación, retroalimentación entre el docente frente a grupo y los estudiantes de la asignatura de Los Números y sus Relaciones y consecuentemente una excelente opción de enseñanza para el formador de formadores y una buena opción de apropiación de saberes por parte de los estudiantes. Las situaciones didácticas son sólo un componente de la Teoría de las Situaciones Didácticas[2], pero para lograr los propósitos establecidos en el programa de la asignatura se ha decidido incluir en la secuencia didáctica propuesta sólo esta parte de la teoría. Son tres los componentes de las situaciones didácticas[2]: a) situación de acción; b) situación de formulación; c) situación de validación. Se aclarar que no es requisito aplicar estas situaciones en el orden en que se describen, ni tampoco aplicar todas ellas con un solo tema, pues dependerá de la disposición del grupo, de su avance, de la apropiación de saberes, y del avance mismo de los temas propuestos.

Una situación didáctica es la puesta en marcha de un cambio de ambiente en el salón de clase, ambiente más propio para la interacción entre el docente y el grupo de estudiantes para lograr los propósitos de enseñanza y así fomentar la apropiación de saberes por parte de los estudiantes. El docente se transforma en un guía, un moderador, un auxiliar, un asesor e inclusive un compañero de los estudiantes. Con esta idea, se describen los propósitos de las situaciones.

I.-Situación de acción.

Su objetivo es recuperar saberes previos al tema de estudio con la ayuda de un medio que puede ser material (algún objeto manipulable que ayuda a observar y a activar el sentido del tacto para así contribuir a la generación de códigos en forma de ideas informales y así fomentar la intuición en los estudiantes) o abstracto (alguna proposición en lenguaje matemático o natural), escrita en hojas de trabajo, y que también fomentan la generación de ideas informales que también activan la intuición. Aquí la labor del docente consiste en generar un ambiente de confianza, guiar o conducir la activación de la intuición, evitando pedir conceptos formales, inclusive invitando a los integrantes del grupo a comunicar ideas totalmente informales, todas ellas necesarias para poder iniciar el estudio del tema a estudiar. Además debe propiciar un ambiente de confianza entre los estudiantes, al grado de que una respuesta incorrecta sea percibida como una opinión que debe discutirse respetuosamente, más que ser percibida como un error por el desconocimiento de conceptos. Es posible iniciar con preguntas apropiadas que detonen el interés en los estudiantes, para así continuar la sesión a manera de un diálogo entre el docente y los estudiantes y muchas veces entre los propios estudiantes en exclusiva.

II.-Situación de Formulación.

El propósito de esta situación es fomentar el diálogo entre los estudiantes exclusivamente. Es una labor nada fácil, pues el docente toma el papel de moderador, no participa

corrigiendo o validando el discurso grupal, sino que modera y guía el discurso entre ellos, evitando que se salgan del tema o se pierda la idea principal. Una vez que el docente inicia la situación proponiendo algún contenido del tema, su labor se torna en un observador, pero en momentos oportunos interviene como ya se dijo, como moderador o guía. La riqueza de esta situación didáctica radica en el fomento del discurso estudiantil, entre ellos mismos, propiciando la seguridad en el diálogo con un lenguaje matemático. En muchos casos, se han observado correcciones entre los mismos estudiantes, ya sin la intervención del docente frente a grupo, quien en todo caso continua fomentando el respeto a las opiniones y la intervención ordenada, de acuerdo con un orden de participación o solicitud de esta.

III.-Situación de Validación.

Su propósito principal es motivar el pensamiento analítico y crítico por parte de los integrantes del grupo, al emitir juicios de valor a las proposiciones matemáticas que realice el docente, mismas que pueden ser verdaderas o falsas. Los estudiantes deben argumentar la opinión que emiten, ya que han tenido la experiencia de haber trabajado con las situaciones de acción y formulación, por lo que es posible que su participación sea cada vez más con argumentos mucho más sólidos, que pueden ya incluir el uso de axiomas, lemas, teoremas, e inclusive ya el uso de las demostraciones. No se trata de que el estudiante sólo emita el juicio de forma binaria, es decir, que catalogue las proposiciones hechas por el docentes como verdaderas o falsas, sino que además de ello, debe de incluir en estas opiniones los argumentos matemáticos necesarios.

Si bien se comentó anteriormente que el orden en que se apliquen las situaciones didácticas no es único, sin embargo, como se aprecia en la descripción anterior, el iniciar con la situación de acción, para continuar con la situación de formulación y concluir con la situación de validación permite de manera natural incrementar el rigor del discurso matemático, pues de empieza con ideas previas al tema con base en la intuición y se termina con un discurso totalmente axiomático.

ii) METODOLOGÍA DIDÁCTICA.

Debido a que los logaritmos se representan en la actualidad utilizando los números reales, se ha elegido el método propuesto en su momento por H. Lebesgue y que se ha considerado muy adecuado por mucho tiempo[14].

Este método inicia con la generalización de los números decimales a una base de numeración b cualquiera, lo que permite generar expresiones denominadas b -narias. Entonces, con base en esta noción, es posible escribir la expresión infinita correspondiente a un número de base b . Esta metodología intenta resolver el problema relacionado con completar el dominio de integridad Q_b , ordenado totalmente, y así abordar de este anillo, al cuerpo R de los números reales. Y este es precisamente la aportación de este método pues es muy intuitivo y fácil de abordar, y cuyo objetivo es completar los elementos faltantes de Q_b . Esta última idea la formuló Dedekind y la publicó en su obra titulada "Ensayos sobre la teoría de Números". En el capítulo 4, referente a la creación de los números irracionales (Dedekind, 1901). Allí describe este autor que todo número racional a , efectúa una separación del sistema R en dos clases tales que cada número a_1 de la primera clase A_1 es menor que todo número a_2 de la clase A_2 , entonces el número a es tanto el mayor número de la clase A_1 como el menor número de la clase A_2 . Con estas

condiciones cualquier separación del sistema R en dos clases A_1 , A_2 se da si posee solamente esta propiedad característica de que todo número a_1 en A_1 es menor que todo número a_2 en A_2 y que por brevedad se llamará a tal separación una cortadura [Schmitt] y designándola por A_1 , A_2 . Así se puede afirmar que todo número racional genera, estrictamente hablando, dos cortaduras, que no son, en esencia diferentes, y además poseen también la propiedad de que ya sea que entre los números de la primera clase exista uno mayor, o que entre los números de la segunda clase, uno menor; y por el contrario, si una cortadura posee esta propiedad, entonces esta se produce por la acción del número racional ya sea mayor o menor. También es fácil mostrar que existen infinitas cortaduras que no son producidas por los números racionales. Por ejemplo, sea D un número entero positivo, con la condición de que no sea el cuadrado de algún entero, entonces existen un entero positivo λ tal que:

$$\lambda^2 < D < (\lambda+1)^2. \quad (27)$$

Es fácil comprobar esta proposición de manera totalmente intuitiva al asignar valores a λ ($1, 2, \dots, n$) y observar que no es posible tener números enteros positivos consecutivos, por lo que D toma valores que solo se escriben en forma de radicales y así continuar con la secuencia propuesta, y estos números escritos con radicales son números irracionales. Regresando a la propuesta metodológica de A. Doneddu[14], es necesario comenzar a escribir los elementos faltantes para así obtener los números racionales conocidos, definiendo así las operaciones del cuerpo Q por medio de sucesiones en Q_b , como lo sugirió Dedekind[30]. Esta propuesta se extiende fácilmente a los números reales R . Se logra así la noción general de expresión de infinitas cifras en la base cualquiera b , y como consecuencia inmediata el orden en el conjunto R^+ de los números reales positivos puede definirse como el orden lexicográfico[14]. Con base en esta metodología el estudio de los logaritmos se lleva a cabo de forma adecuada y comprobada.

VI. DESCRIPCIÓN DEL PLAN DE TRABAJO PARA ABORDAR EL TEMA DE LOGARITMOS.

Es Normalmente se han utilizado entre 4 y 5 sesiones de dos horas cada una, dos veces por semana. El programa es semestral y la asignatura Los Números y sus Relaciones se aborda entre septiembre y enero. La información requerida en este plan de trabajo ha sido descrita en las secciones (1 – 5) de este artículo. Se inicia el trabajo con logaritmos con base en la situación de acción. En plenaria se propone al grupo que generen expresiones numéricas con números irracionales. Ya con ellos, se les pide que verifiquen la forma en que los axiomas de campo de los números reales justifican las operaciones básicas con estas expresiones, la adición, sustracción, multiplicación y división. El propósito de esta sesión es recuperar los algoritmos de estas operaciones y justificarlos con las propiedades mencionadas. El papel del docente consiste en generar o proponer que los estudiantes lo hagan, enunciados aritméticos escritos con números irracionales. Normalmente la solución a los ejercicios se pide la trabajen en binas.

Esa misma sesión, y con la situación de acción, ahora se trabaja la noción de exponente de una base y su potencia. Para ello, se utiliza la calculadora científica, recordándoles el uso de las funciones de esta, para así empezar a comprender el

concepto de logaritmo, de manera intuitiva, promoviendo la participación individual y la conjetura. En cierto momento, se les solicita obtener logaritmos de números mayores que cero pero menores que la unidad. Para ello, se trabaja ahora con la situación de formulación, dejando al grupo que conjeture al respecto, y que trate de justificar lo que sucede con la salida en pantalla de la calculadora y su comparación con el uso de tablas y las ideas que hasta ese momento van adquiriendo. Esta situación normalmente continúa la siguiente sesión, y es cuando el grupo logra entender e interpretar los números que aparecen en la calculadora. Se les pide que expliquen con el uso de lenguaje escrito, y además justifiquen la explicación con argumentos matemáticos (propiedades de los números reales).

En esta parte de la secuencia didáctica, el docente sólo monitorea al grupo y en todo caso guía o aconseja sobre el tipo de preguntas o conjeturas entre los integrantes del grupo. En la tercera sesión y con base en la situación de acción, se proponen a los estudiantes calcular diversas operaciones utilizando logaritmos, y justificar los resultados con los axiomas correspondientes. En esta parte, la intervención docente se realiza al momento de validar algún cálculo, explicando lo que sucede al operar las características y las mantisas por separado, con énfasis en la sustracción y la división. En esta parte del plan de trabajo, se presta para trabajar con la situación de validación, proponiendo algunas expresiones a los estudiantes, falsas y verdaderas, y se solicita al grupo trabajar en binas o ternas y validar aquellas que son correctas o corregir las que no lo son, argumentando sus respuestas con los axiomas correspondientes. La cuarta y quinta sesiones se utiliza la situación de validación, ahora solicitando una argumentación más sólida. Posteriormente, la intervención docente se centra en la solución junto con el grupo de expresiones numéricas más complicadas y ofreciendo explicación con base en argumentos axiomáticos. Durante la aplicación de estas sesiones de trabajo, el docente ofrece al grupo cápsulas de información histórica sobre el desarrollo del concepto de logaritmo y su uso, mismas que intercala con el trabajo del grupo. La conclusión del tema con logaritmos se realiza normalmente entre la cuarta y quinta sesiones, y es aquí donde el docente aprovecha la oportunidad de exponer el tema de manera rigurosa, pues ya los conceptos han sido convertidos en saberes por parte de los estudiantes, quienes toman nota de esta exposición.

VII. ANÁLISIS DE RESULTADOS.

Con el propósito de emitir un juicio de valor relacionado con los resultados de la propuesta didáctica, se ha optado por clasificar éste con un enfoque cualitativo basado en los diarios de observación del docente asignado para trabajar este espacio curricular. Los términos de esta clasificación, ordenados decrecientemente con relación al éxito obtenido son: a) muy satisfactorio; b) satisfactorio; c) bueno; d) regular; e) malo. En un primer acercamiento a este análisis se debe mencionar que se ha cuidado mucho guiar y enfocar el trabajo áulico para “favorecer el desarrollo de facultades para adquirir conocimientos, así como la capacidad de observación, análisis y reflexión críticos”, (Párrafo II, Art. 7, Ley General de Educación, 2018), que se puede observar en la descripción de las situaciones didácticas que contribuyen al cumplimiento este inciso, sobre todo las situaciones de acción y formulación. El término favorecer debe entenderse como la situación didáctica apropiada y guiada por el docente frente a grupo y que debe propiciar la confianza entre los estudiantes del grupo, para que

emitan opiniones y que sean respetadas por todos, elaboren conjeturas, aprendan a adquirir saberes partiendo de opiniones que no necesariamente sean correctas, desarrollen la identificación y el aprecio por la matemática en general y tomen conciencia de la importancia de convertirse en docentes comprometidos. Debido a que esta asignatura se ha cursado en el tercer semestre, y era un primer acercamiento al estudio formal de la matemática en ese programa educativo, el alcance o logro de este párrafo normativo ha sido regular en algunos casos y bueno en muchos otros. La razón se basa en que los estudiantes no están acostumbrados al inicio del semestre, a emitir opiniones (correctas o no), se ha observado en ellos cierta desconfianza para opinar frente a sus compañeros y el docente y en muchos casos, timidez. Son algunos estudiantes los que opinan con confianza, pues su antecedente teórico es muy bueno.

Problema 1. El tema de Logaritmos en la escuela Secundaria mexicana

Para contribuir a disminuir este problema se ha utilizado la aplicación de la situación de acción, en la que se motiva y detona el proceso intuitivo en los estudiantes, al proponerles un análisis histórico de la manera en que fueron descubiertos los logaritmos. Además, esta situación permite abordar contenidos temáticos necesarios para iniciar el estudio de los logaritmos. Entre estos temas están las propiedades de campo de los números reales, su aplicación a las operaciones con los números irracionales y por tanto, reales, las características de ellos y la noción de cortadura. Con el estudio de estos antecedentes matemáticos se ha contribuido al desarrollo de: el hábito por la lectura; expresión de sus ideas con claridad, sencillez y corrección; generación de respuestas propias a partir de sus conocimientos, todos ellos perteneciente al conjunto de rasgos del perfil de egreso denominados habilidades intelectuales específicas (Plan de estudios 1999, LESM). Con relación a los propósitos generales estipulados en el programa de la asignatura, se ha contribuido a “la adquisición de elementos para analizar situaciones de estudio relacionadas con el significado de los números, sus relaciones y operaciones, que resulten adecuadas para los estudiantes de secundaria” (Los números y sus relaciones. Programa de estudio, 2000). Los resultados han sido buenos y satisfactorios, pues al concluir el semestre los estudiantes, en general, han adquirido el hábito por la expresión de sus ideas, y también han aceptado que sus opiniones deben ser emitidas, independientemente de que sean correctas o no. También el grado de confianza en sí mismos aumenta satisfactoriamente.

Problema 2. El abuso en el uso de las calculadoras electrónicas.

Problema 3. El trabajo con los logaritmos. La interacción con la calculadora

Estas dos problemáticas se abordan en este análisis conjuntamente. El problema 2, tiene un antecedente anterior al ingreso de los estudiantes al programa educativo, por lo que la labor de concientización en los estudiantes conlleva al problema 3.

Con apoyo de la situación de formulación y posteriormente de validación los estudiantes han tomado conciencia de un uso adecuado de la tecnología digital, caso particular, la calculadora electrónica. Al solicitarles la explicación acerca del número que aparece en pantalla de la calculadora cuando se teclea encontrar el logaritmo de números mayores que la unidad y compararlo con los logaritmos de números mayores que cero pero menores que la unidad, su sentido intuitivo se

activa al máximo. Se ha observado que las discusiones entre ellos para encontrar la explicación adecuada, “fomenta mucho su capacidad para describir, narrar, explicar y argumentar; enfrenta desafíos intelectuales generando respuestas propias a partir de sus conocimientos”; además va adquiriendo la “disposición y capacidades propias para la investigación científica; curiosidad, capacidad de observación” (Plan de estudios 1999, LESM, 1999). Las opiniones que expresan los estudiantes con relación al uso excesivo de estos dispositivos electrónicos han sido de carácter reflexivo, pues han aceptado que si bien es de gran ayuda para abreviar tiempo y hasta esfuerzo innecesario en la realización de proposiciones matemáticas rutinarias, no es necesariamente útil en algunos casos, pues hay que saber interpretar la respuesta que ofrece el dispositivo, sobre todo en el caso de logaritmos de números mayores que cero pero menores que la unidad, es decir, la calculadora no emite una respuesta incorrecta, en realidad es correcta, pero en la interacción con el ser humano, éste debe saber leer o interpretar la respuesta. , por lo que en muchas ocasiones no es recomendable su uso. De forma natural y con la aplicación de la situación de validación, se ha logrado que los estudiantes “adquieran bases sólidas en relación con el estudio de los números y sus relaciones, tanto para abordar los siguientes cursos de la especialidad como para realizar un trabajo docente de calidad” (Programa de la asignatura Los números y sus relaciones, 2000). Se ha alcanzado un rubro de regular en la mayoría de los semestres y en algunas ocasiones, bueno. Si bien aceptan evitar utilizar la calculadora en exceso, al paso de los siguientes semestres siguen persistiendo en ello, pues además de la necesidad de acortar tiempo y esfuerzo para cumplir con los trabajos en otras asignaturas, también la propia normatividad sugiere su uso en la educación secundaria (Párrafo VII, Art. 7, L. G. E., 2018) [31].

Problema 4. El trabajo con logaritmos. Aplicación de las propiedades de campo de los números reales R .

Con apoyo de las situaciones de acción y validación los estudiantes del grupo atendido han enfrentado el desafío de realizar operaciones aritméticas utilizando los logaritmos. Una vez revisadas las propiedades o axiomas de campo de los números reales, se les solicita que realicen las operaciones de multiplicación, división, potenciación y radicación de números reales. Para ello, con la situación de acción se revisan las reglas de los exponentes. Se ha observado que con la multiplicación y la potenciación no se presentan dificultades, sólo algunas dudas que se resuelven de inmediato. No sucede así con las operaciones de la división y radicación de números reales. Con ayuda de la situación de validación los estudiantes logran comprender que es necesario separar la mantisa de la característica para efectuar las operaciones adecuadas, pero no solo eso, sino que ya son capaces de explicar el proceso de cálculo con base en los axiomas de campo de los números reales, es decir que han transitado de un pensamiento intuitivo a uno axiomático.

Ya son capaces de resolver operaciones más complicadas, pues se han apropiado de un saber matemático basado en propiedades.

Con ello, se ha contribuido al desarrollo de un “método para plantear preguntas y para poner a prueba respuestas y reflexión crítica” del conjunto de rasgos del perfil de egreso denominado Habilidades Intelectuales Específicas.

También se ha logrado activar sus “saberes con relación al diseño y organización para poner en práctica estrategias y actividades didácticas adecuadas a las necesidades, intereses y

formas de desarrollo de los adolescentes”, incluidas en el rasgo Competencias Didácticas, pues han experimentado el valor de las situaciones didácticas como un método efectivo de enseñanza. También se ha motivado que los estudiantes “valores el trabajo en equipo como un medio para la formación continua y el mejoramiento de la escuela”, del rasgo denominado Identidad Profesional y Ética (Plan de estudios LESM, 1999). Los resultados observados permiten distinguir el rubro de bueno con relación al desempeño estudiantil. Si bien no se consolida su habilidad para la demostración, se ha empezado adecuadamente este proceso, que continua en los estudiantes al ir avanzando de semestre. En algunos casos se ha logrado un nivel de satisfactorio, pues son estudiantes con un buen bagaje en el conocimiento matemático.

Es importante mencionar que el proceso de evaluación que siempre se ha seguido se basa en lo estipulado en el Acuerdo Secretarial No. 261, que posee un enfoque formativo. Este proceso es continuo y sin perder de vista lo estipulado en el Artículo 50 de la Ley General de Educación.

VIII. CONCLUSIONES.

Con base en el análisis anterior, y retomando la hipótesis planteada al inicio de este artículo que afirma que con el apoyo de la intuición de los estudiantes, el diseño y aplicación de una secuencia didáctica basada en la tipología propuesta por G. Brousseau facilita el desarrollo del pensamiento axiomático en ellos, con el tema de logaritmos, es posible afirmar que es verdadera. La intuición es una característica del pensamiento humano enfocado sobre todo a la ciencia. Pero también permea en el lenguaje abstracto, pues a través de la observación, el proceso de intuición se activa.

Esta activación se motiva adecuadamente con el uso de las situaciones didácticas que sin duda permiten desarrollar en los estudiantes gran variedad de competencias, que enfocadas hacia algún propósito en particular, en este caso la axiomatización con el tema de logaritmos, también contribuyen al logro de los propósitos establecidos en el programa de la asignatura Los Números y sus relaciones, además de contribuir al desarrollo de muchos rasgos del perfil de egreso de los estudiantes inscritos en el Plan de Estudios de la LESM 1999. Una condición necesaria para el logro de todo ello es un dominio completo del tema por parte del formador de formadores, y no sólo de un tema en particular, sino también del conocimiento matemático, pues al guiar o conducir estas situaciones, está expuesto a gran variedad de cuestionamientos por parte de los estudiantes, y tiene el encargo de dar respuesta de inmediato, o de motivar el reto y la curiosidad en ellos, también de inmediato, y sólo se logra si se domina el tema y la asignatura. Se debe mencionar también que estos resultados han sido confirmados por el proceso de evaluación del programa educativo LESM, por parte de organismos externos a la Escuela Normal Superior de México, como son los Comités Interinstitucionales para la Evaluación de la Educación Superior (CIEES), en los procesos evaluativos en el 2010, en que se obtuvo el nivel 1; posteriormente, en 2016 se obtuvo la acreditación de este programa educativo. En este proceso se valida la aceptación por parte de los empleadores, cuyas opiniones han sido favorables y han contribuido a mejorar las áreas de oportunidad que se han detectado. El tema de estudio y la asignatura misma sólo son una pequeña parte del programa educativo, sin embargo la aplicación de esta técnica de enseñanza se ha aplicado también a otros espacios

curriculares, pues ha sido tema de seminario entre los integrantes del Cuerpo Académico “Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la formación docente y la educación básica”. Es necesario mencionar que no es la única técnica de enseñanza utilizada con los estudiantes del programa educativo, sin embargo sí ha sido tema de investigación por parte de los integrantes del mencionado equipo de investigación.

Queda sin embargo camino por recorrer, áreas de oportunidad en las que hay que actuar. Este programa educativo concluye su aplicación en julio de 2021. El programa de estudios Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas entró en vigor en agosto de 2018. La carga curricular relacionada con el conocimiento matemático es mucho mayor, por ello, las áreas de oportunidad detectadas serán atendidas con este nuevo enfoque. Será necesario generar seminarios dedicados al conocimiento matemático puro, además de aquellos dedicados a su didáctica y por consecuencia, generar la Línea de Generación y Aplicación del Conocimiento enfocada al conocimiento matemático y como consecuencia realizar investigación en este rubro. También será necesario involucrar a los estudiantes en este proceso de investigación para así enriquecer los productos en este rubro.

REFERENCIAS

- [1] S.E.P: Plan de Estudios 1999: Secretaría de Educación Pública (México,1998).
- [2] Brousseau, G.: Theory of Didactical Situations in Mathematics: Kluwer Academic Press (Cornwall, 1997)
- [3] Stahl, S.: Introductory Modern Algebra. A Historical Approach: John Wiley and Sons Inc. (N. Y.,1997).
- [4] Stillwell, J.: Mathematics and its History: Springer Verlag (N. Y.,2002).
- [5] Cajori, F.: Teaching and History of Mathematics in the United States: Government Printing Office (Washington,1890).
- [6] Cajori, F.: A History of Elementary Mathematics with hints on methods of teaching: The MacMillan Company (N. Y. ,1924).
- [7] Greenstein, D. S.: A Property of the Logarithm: American Mathematical Monthly, vol. 72, p.767: Republicado en *Apostol*, T. : Editors. (1992). *A Century of calculus Part 1. (1894 – 1968). The Raymond W. Brink Selected Mathematical papers. The Mathematical Association of America.* (U.S.A., 1965)
- [8] Allendoerfer, C. B.: The Proof of Euler’s Equation: American Mathematical Monthly, vol. 55, pp 94 – 95. Republicado en *Apostol*, T. et al. Editors. (1992). *A Century of calculus Part 1. (1894 – 1968). The Raymond W. Brink Selected Mathematical papers. The Mathematical Association of America.* (U.S.A., 1948)
- [9] Dunkel, O.: Exponential and Hyperbolic Functions. Relating to the exponential Function: American Mathematical Monthly, vol. 24, pp. 244 – 246. Republicado en *Apostol*, T. et al. Editors. (1992). *A Century of calculus Part 1. (1894 – 1968). The Raymond W. Brink Selected Mathematical papers. The Mathematical Association of America.* (U.S.A., 1917)
- [10] Manteca, E. Coordinador Editorial: Los Números y sus Relaciones: Secretaría de Educación Pública (México,2000).
- [11] Manteca, E.: Matemáticas. Educación Básica: Secundaria. Programas de Estudio 2006: Dirección General de Desarrollo Curricular: Secretaría de Educación Pública (México, 2006).
- [12] Dirección General de Materiales y Métodos Educativos de la Subsecretaría de Educación Básica y Normal: Plan y Programas de Estudio 1993. Educación básica. Secundaria: Secretaría de Educación Pública (México,1993)
- [13] Rodríguez, L. Coordinador General DGDC: Programas de estudio 2011: Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas. Dirección General de Desarrollo Curricular: Secretaría de Educación Pública (México,2011).
- [14] Doneddu, A.: Curso de Matemáticas Tomo I. Álgebra y Geometría: Editorial Aguilar. (Madrid, 1978).
- [15] Gardner, M.: The calculating rods of John Napier, the eccentric father of the logarithm. *Mathematical Games: Scientific American Magazine March, 1973, Volume 228, No. 3, p. 110 – 113. Scientific American Inc.* (N. Y., 1973)
- [16] Encyclopaedia Britannica.: Napier, John. Encyclopaedia Britannica Volume 16: Encyclopaedia Britannica Inc. Chicago. (Montaner & Simón & Jackson, editores: Diccionario Enciclopédico Hispano – Americano de Literatura, Ciencias, Artes, etc. Tomo XII pp. 1058 – 1063: Ferris Printing Company (N. Y., 1949)
- [17] Fischbein, E.: Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach: Springer Science + Business Media. Dordrecht. (Toluca, 2004).
- [18] Diccionario de la Real Academia de la Lengua.: Tomo IV: Espasa – Calpe Editores (Madrid, 1981)
- [19] Havil, J.: Life Logarithms and Legacy. John Napier: Princeton University Press: pp. 96 – 130. (N. J.,2014)
- [20] Swokowski, E.. Cálculo con Geometría Analítica. Grupo Editorial Iberoamérica. (México, 1982)
- [21] Hall, H. S. & Knight S. R.: Álgebra Superior: Editorial UTEHA. (México, 1969)
- [22] Hohn, F. E.: An existence proof for Logarithms: American mathematical monthly, vol. 50 (1943): pp. 115 – 116. Republicado en *Apostol*, T. et al. Editors. (1992). *A Century of calculus Part 1. (1894 – 1968). The Raymond W. Brink Selected Mathematical papers. The Mathematical Association of America.* (U.S.A., 1943)
- [23] Hardy, G. H.: A Course of Pure Mathematics: Cambridge University Press (London,1928)
- [24] Nápoles Gándara, A. Álgebra Elemental. Libro tercero: Edición preparada por el autor. (México, 1968)
- [25] Sánchez Meza, J. M.: Matemáticas. Tercer Curso.Primer Edición: Editorial Herrero. (México, 1957)
- [26] Caballero, A.; Martínez, L.; Bernárdez, J.: Matemáticas. Tercer curso. Primera Edición: Editorial Esfinge. (México, 1957)
- [27] Cárdenas, H.; Curiel, R.: Matemáticas. Tercer Curso. Primera Edición: Compañía Editorial Continental, S. A. (México, 1972)
- [28] Herrera-Armendia, F. G. 1968: Una perspectiva diferente y moderna de la educación matemática en México en la Escuela Secundaria, a 50 años de un gran Plan de Estudios. Revista de la Escuela Normal Superior de México. Octava Época, número 7. Agosto de 2018, pp.136 – 149: Editorial de la Escuela Normal Superior de México (México, 2018)
- [29] Secretaría de Educación Pública: Programas para la Educación media Básica: Consejo Nacional Técnico de la Educación: Comisión nacional de los Libros de Texto Gratuito (México, 1981).
- [30] Dedekind, R.: Essays on Number: Open Court Publishing Company. (Chicago,1901).
- [31] Congreso de los Estados Unidos Mexicanos: Ley General de Educación. Gobierno Federal: DOF (México, 2018).

Breve deducción de las Fórmulas de Cardano a través del Polinomio de Taylor.

Jaime William Flores Tecalco.

Estudiante de la Licenciatura en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria, Escuela Normal Superior de México (ENSM), Manuel Salazar 201 Colonia Ex-hacienda del Rosario, Azcapotzalco, 02420 CDMX, México.

Estudiante de la Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Universidad Autónoma Metropolitana (UAM)-Azc, Av. San Pablo Xalpa 180 Colonia Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200 CDMX, México.

Resumen- En el presente artículo describo una deducción de las Fórmulas de Cardano apoyándome en el Polinomio de Taylor para su desarrollo. En la mayoría de los pasos trato de expresar de la manera más detallista el desarrollo para una mejor comprensión y para que el lector elabore sus propias conclusiones.

Palabras Clave- Series infinitas, Series de potencias, Serie de Taylor, Polinomio de Taylor, Fórmulas de Cardano.

Abstract- The article describes deduction of the Cardano's formulas with Taylor's Polynomial. Expressing the resolution in a detailed way for a better understanding inviting the reader to create their own conclusions.

Keywords- Infinite series, Power series, Taylor's series, Taylor's polynomial, Cardano's formulas.

Mathematical Subject Classification: 97D20.

I. INTRODUCCIÓN

A través del tiempo las matemáticas han ido evolucionando y cambiando, cada vez se descubren nuevas perspectivas a diferentes problemas.

Un lado, a mi parecer negativo, es que cada vez más tópicos que en su momento se alzaban de gloria ahora se han ido empolvando en la sombra de otros algoritmos más fáciles de usar.

Un claro ejemplo de ello son las Fórmulas de Cardano, expresiones desarrolladas para encontrar las soluciones a ecuaciones cúbicas. Hace algunas décadas se podían encontrar en algunos planes de estudios a nivel universitario en nuestro país, pero estas las han ido ocultando a través de las generaciones.

Causas existen muchas; considero que una de las más influyentes es, citando al Dr. Francisco G. Herrera Armendia, la "Flojera Magisterial". Este fenómeno ha modificado la manera de pensar de los estudiantes y de algunos impartidores de educación. En mi opinión, considerar no enseñar o no aceptar ciertos temas por flojera e incluso por desactualización produce que se nuble la mente y se formen personas frágiles de pensamiento, metafóricamente hablando.

Para desempolvar un tema digno de siempre tomarlo en cuenta, he ocupado este artículo intentando describir de una manera explícita como se originan o como se desarrollan las Fórmulas de Cardano ocupando el polinomio de Taylor; por dicha razón, primero anexo un breve desarrollo de la serie y polinomio de Taylor y posteriormente las Fórmulas de Cardano.

II. SERIE Y POLINOMIO DE TAYLOR

Algunas funciones se pueden expresar como series infinitas. Los términos de tales series contienen a la variable x .

Sea x una variable; una serie de potencias en x es una serie de la forma [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (1)$$

Donde a_k es un número real.

Sea c un número real y x una variable. Una serie de potencias en $x - c$ es una serie de la forma [1]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \dots + a_n (x - c)^n + \dots \quad (2)$$

Tomando la premisa que una función f se puede representar por una serie de potencias. La idea para hallar esa serie de potencias es la siguiente:

Si f es una función que se puede representar por una serie de potencias en $x - c$ tenemos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n \quad (3)$$

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - c) + a_2 (x - c)^2 + \dots + a_n (x - c)^n + \dots \quad (4)$$

Una serie convergente de potencias de x es una función de x para todos los valores dentro del intervalo de convergencia [2].

El siguiente paso es determinar los coeficientes a_n en términos de f .

En (4) si hacemos $x = c$ entonces obtenemos:

$$f^{(n)}(c) = n! a_n \quad (13)$$

$$f(c) = a_0 \quad (5)$$

De (13) podemos obtener una relación en función de a_n .

Y con ello se ha determinado a_0 , el primer coeficiente de la serie (4).

Se puede derivar la serie (4) término a término. Al aplicar este razonamiento obtenemos la siguiente expresión:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + 4a_4(x-c)^3 + \dots \quad (6)$$

En (6) si hacemos $x = c$ entonces obtenemos:

$$f'(c) = a_1 \quad (7)$$

Se puede derivar (6) término a término. Al aplicar este razonamiento obtenemos:

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x-c) + 3 \cdot 4a_4(x-c)^2 + \dots \quad (8)$$

En (8) si hacemos $x = c$ entonces obtenemos:

$$f''(c) = 2a_2 \quad (9)$$

Se puede derivar (8) término a término. Al aplicar este razonamiento obtenemos:

$$f'''(x) = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x-c) + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5(x-c)^2 + \dots \quad (10)$$

En (10) si hacemos $x = c$ entonces obtenemos:

$$f'''(c) = 2 \cdot 3a_3 \quad (11)$$

Claramente se puede notar el comienzo de un patrón en estas operaciones, por lo tanto, si se continúa derivando y sustituyendo $x = c$ obtenemos la siguiente igualdad:

$$f^{(n)}(c) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot na_n = n! a_n \quad (12)$$

Donde n es el n -ésimo término.
Reduciendo la expresión (12) tenemos:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad (14)$$

Se puede observar que (14) no es indeterminada si n es igual a 0. Si esto llegase a ocurrir sería válido ya que:

$$\begin{aligned} n &= 0 \\ 0! &= 1 \quad ; \quad f^{(0)} = f \end{aligned}$$

Teniendo la expresión (14) ya nos es posible sustituir esta equivalencia en la ecuación (3) antes mencionada. Así obtendremos la siguiente generalidad:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \quad (15)$$

Al desarrollar (15) obtenemos:

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} (x-c) + \frac{f''(c)}{2!} (x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!} (x-c)^3 + \dots \quad (16)$$

Esta serie (16) se le conoce como *Serie de Taylor* en la función f en c (ya sea alrededor o centrada en c) [3].

La serie de Taylor es un desarrollo de términos infinitos, como esto no es realizable se tiende a utilizar una aproximación de términos finitos, esto significa que $f(x)$ es el límite de la sucesión de sumas parciales [3].

En el caso de la serie de Taylor las sumas parciales quedan representadas:

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(c)}{i!} (x-c)^i \quad (17)$$

T_n en (17) es un polinomio de grado n llamado *Polinomio de Taylor de n -ésimo grado de f en c* .

El polinomio de Taylor es una herramienta que nos auxilia al sustituir una función $f(x)$ por un polinomio $T_n(x)$ en base a un punto c de la función $f(x)$. Este proceso es muy útil al trabajar con funciones trascendentes.

Si desarrollamos la sumatoria de (17) obtenemos el polinomio de Taylor expandido:

$$T_n(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} (x-c) + \frac{f''(c)}{2!} (x-c)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \quad (18)$$

Un caso especial dentro de este polinomio mencionado es cuando $c = 0$. Se le llama polinomio de Maclaurin y queda definido como:

$$T_n(x) = M_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \quad (19)$$

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad (20)$$

III. FÓRMULAS DE CARDANO

En primera instancia tenemos como fundamento la forma canónica de la ecuación de tercer grado.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (21)$$

En (21) podemos notar que el coeficiente del término de mayor grado es 1, ya que es conveniente para el desarrollo del procedimiento. La división por el coeficiente de x^3 no afecta las raíces de la ecuación.

El objetivo que se trabajará en (21) es simplificar la expresión de tal manera que no contenga algún término cuadrático, por ende ocuparemos una útil sustitución:

$$x = z + k \quad (22)$$

Donde k es un número arbitrario.

Ocupando la fórmula del Polinomio de Taylor, ya antes demostrada, obtenemos la siguiente expresión en función de (22).

$$f(z+k) = f(k) + \frac{f'(k)}{1!} z + \frac{f''(k)}{2!} z^2 + \frac{f'''(k)}{3!} z^3 \quad (23)$$

Ya construida (23) vamos a calcular las derivadas de la función evaluadas en k .

$$f(k) = k^3 + ak^2 + bk + c \quad (24)$$

$$f'(k) = 3k^2 + 2ak + b \quad (25)$$

$$f''(k) = 6k + 2a \quad (26)$$

$$f'''(k) = 6 \quad (27)$$

Para eliminar el término z^2 podemos igualar (26) a cero. Entonces:

$$\begin{aligned} f''(k) &= 6k + 2a = 0 \\ 6k + 2a &= 0 \\ k &= -\frac{a}{3} \quad (28) \end{aligned}$$

Al haber hallado el valor k lo evaluamos en (24) y (25).

$$f(k) = f\left(-\frac{a}{3}\right) = c - \frac{ba}{3} + \frac{2a^3}{27} \quad (29)$$

$$f'(k) = f'\left(-\frac{a}{3}\right) = b - \frac{a^2}{3} \quad (30)$$

Entonces (22) queda de la forma:

$$x = z - \frac{a}{3} \quad (31)$$

Y por lo tanto la fórmula (23), al sustituir los valores hallados en (29) y (30), la podemos expresar como:

$$f(z+k) = \left(c - \frac{ba}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) + \left(\frac{b - \frac{a^2}{3}}{1!}\right) z + \left(\frac{6}{3!}\right) z^3$$

$$z^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right) z + \left(c - \frac{ba}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 0 \quad (32)$$

Al observar (32) podemos hacer una segunda sustitución:

$$p = b - \frac{a^2}{3} \quad (33)$$

$$q = c - \frac{ba}{3} + \frac{2a^3}{27} \quad (34)$$

Entonces (32) queda transformada en:

$$z^3 + pz + q = 0 \quad (35)$$

En la expresión (35) podemos crear una tercera sustitución conveniente para continuar con el proceso:

$$z = u + v \quad (36)$$

Sustituyendo (36) en (35) y desarrollando tenemos:

$$\begin{aligned} (u+v)^3 + p(u+v) + q &= 0 \quad (37) \\ u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q &= 0 \\ u^3 + v^3 + (u+v)(3uv+p) + q &= 0 \end{aligned}$$

Si $(u+v)(3uv+p) = 0$ entonces:

$$u^3 + v^3 = -q \quad (38)$$

Si $3uv + p = 0$ entonces:

$$uv = -\frac{p}{3} \quad (39)$$

Al elevar al cubo (39) obtenemos:

$$u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \quad (40)$$

Al elevar al cuadrado (38) obtenemos:

$$(u^3 + v^3)^2 = u^6 + 2u^3 v^3 + v^6 = q^2$$

$$u^6 + 2u^3 v^3 + v^6 = q^2 \quad (41)$$

Y si a (40) la multiplicamos por cuatro obtenemos:

$$4(u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27})$$

$$4u^3 v^3 = -\frac{4p^3}{27} \quad (42)$$

Al restar (42) de (41) y al desarrollar:

$$u^6 - 2u^3 v^3 + v^6 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

$$(u^3 - v^3)^2 = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

$$u^3 - v^3 = \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

$$u^3 - v^3 = \left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (43)$$

Si sumamos (38) y (43) y desarrollamos obtenemos:

$$u^3 + v^3 + u^3 - v^3 = -q + \left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2u^3 = -q + \left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \frac{\left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = \left[-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} \quad (44)$$

Si le restamos (43) a (38) y desarrollamos obtenemos:

$$u^3 + v^3 - u^3 + v^3 = -q - \left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$2v^3 = -q - \left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$v = \left[-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} \quad (45)$$

En este punto ya conocemos el valor de u y v en función de p y q , por lo tanto los podemos remplazar en (36) para obtener la primera raíz de (35).

$$z = u + v \quad (36)$$

$$z_1 = \left[-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}} \quad (46)$$

Hallada z_1 debemos encontrar z_2 y z_3 . Una forma de comenzar a hacerlo es aplicando la regla de Ruffini en (35), dividiendo esta igualdad por z_1 , ya que es raíz del polinomio.

z^3	z^2	z	$\#$	
1	0	p	q	z_1
	z_1	z_1^2	$z_1(p+z_1^2)$	
1	z_1	$p+z_1^2$	$q+p z_1+z_1^3$	

Nos damos cuenta de que el residuo de la división es:

$$q + p z_1 + z_1^3$$

Y al ordenarla

$$z_1^3 + p z_1 + q \quad (47)$$

Al dividir un polinomio entre su raíz con el método de Ruffini el residuo es cero, entonces podemos igualar (47) con cero ya que z_1 es una raíz de (35).

$$z_1^3 + p z_1 + q = 0 \quad (48)$$

Continuando con el método de Ruffini, hemos encontrado una factorización de (35):

$$(z - z_1)(z^2 + z_1 \cdot z + p + z_1^2) = 0 \quad (49)$$

La relación (48) la podemos escribir en función de $p + z_1^2$.

$$z_1^3 + p z_1 + q = 0$$

$$\begin{aligned} q + z_1(p + z_1^2) &= 0 \\ p + z_1^2 &= -\frac{q}{z_1} \end{aligned} \quad (50)$$

Podemos sustituir (50) en (49).

$$(z - z_1) \left(z^2 + z_1 \cdot z - \frac{q}{z_1} \right) = 0 \quad (51)$$

Y por lo tanto:

$$z^2 + z_1 \cdot z - \frac{q}{z_1} = 0 \quad (52)$$

Resolviendo (52) obtendremos z_2 y z_3 ; para ello ocuparemos la fórmula general.

$$z_{2,3} = \frac{-z_1 \pm \sqrt{z_1^2 - 4(1)(-\frac{q}{z_1})}}{2}$$

$$z_{2,3} = -\frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + \frac{q}{z_1}}$$

De aquí llegamos a las siguientes expresiones:

$$z_2 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + \frac{q}{z_1}} \quad (53)$$

$$z_3 = -\frac{z_1}{2} - \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + \frac{q}{z_1}} \quad (54)$$

Por lo tanto y recapitulando hemos encontrado las raíces de (35).

$$z_1 = \left[-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (46)$$

$$z_2 = -\frac{z_1}{2} + \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + \frac{q}{z_1}} \quad (53)$$

$$z_3 = -\frac{z_1}{2} - \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + \frac{q}{z_1}} \quad (54)$$

A éstas fórmulas se les conocen como *Fórmulas de Cardano*. Cabe mencionar que la notación puede variar, sin embargo, la relación entre las variables y términos constantes son la misma.

Para conocer las soluciones de (21) simplemente realizamos:

$$x_1 = z_1 - \frac{a}{3} \quad (54.1)$$

$$x_2 = z_2 - \frac{a}{3} \quad (54.2)$$

$$x_3 = z_3 - \frac{a}{3} \quad (54.3)$$

En la raíz (46) podemos denotar el discriminante como:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \quad (55)$$

Evidentemente, Δ (Discriminante) será positivo, negativo o cero. Cuando $\Delta \geq 0$ no tenemos ningún problema al aplicar directamente las fórmulas anteriores, pero cuando $\Delta < 0$ debemos hacer unas adecuaciones.

El hecho de que raíces de una expresión cúbica, en el caso de que:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \quad (56)$$

Se presentaran en una forma que incluyera raíces de números imaginarios desorientó a los matemáticos antiguos por largo tiempo y este caso fue llamado *casus irreducibilis* (caso irreducible) [4].

Pero ahora sabemos cómo proceder para solucionarlas, aplicando una resolución trigonométrica.

Cuando $\Delta < 0$, la primera raíz la podemos escribir:

$$\begin{aligned} z_1 &= \left[-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \\ z_1 &= \left[-\frac{q}{2} + (\Delta)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2} - (\Delta)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{3}} \\ z_1 &= \left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}i \right]^{\frac{1}{3}} + \left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}i \right]^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (56)$$

Podemos decir que z_1 es la suma de dos números complejos conjugados, entonces podemos ocupar las siguientes relaciones:

$$(a + bi)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{3} \quad (57)$$

$$(a - bi)^{\frac{1}{3}} = r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi k}{3} - i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{3} \quad (58)$$

Si sumamos (57) y (58) obtenemos:

$$(a + bi)^{\frac{1}{3}} + (a - bi)^{\frac{1}{3}} = 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi k}{3} \quad (59)$$

Con (59) desaparecemos el número imaginario y el resultado es real, dicho grosso modo.

El módulo del número complejo r lo calculamos con:

$$r = \sqrt{m^2 + n^2} \quad (60)$$

Dónde:

$$m = -\frac{q}{2} \quad (61)$$

$$n = \sqrt{\frac{-q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} \quad (62)$$

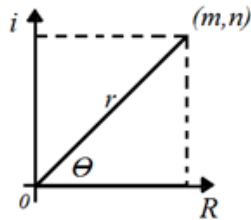


Figura 1.- Módulo de un complejo (r).

Entonces al sustituir m, n en (60) tenemos:

$$r = \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}$$

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \quad (61)$$

$$r^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}$$

$$r^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}$$

$$r^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \quad (62)$$

El ángulo teta θ lo obtendremos con:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{\sqrt{27}q}{2p\sqrt{-p}} \quad (63)$$

Relación obtenida por trigonometría. Expresaremos $\pi = 180^\circ$ y k es una constante que tendrá los valores de 0, 1, 2 en las ecuaciones de tercer grado. Conociendo los valores de las incógnitas, podemos sustituirlos en (59) en función de z :

$$(a + bi)^{\frac{1}{3}} + (a - bi)^{\frac{1}{3}} = 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi k}{3} \quad (59)$$

$$z = 2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi k}{3}$$

$$z = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi k}{3}, \text{ con } k = 0, 1, 2 \quad (64)$$

Por lo tanto, las fórmulas para obtener las raíces z_1, z_2 y z_3 son:

$$z_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\theta}{3} \quad (65)$$

$$z_2 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\theta + 360^\circ}{3} \quad (66)$$

$$z_3 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\theta + 720^\circ}{3} \quad (67)$$

Y para conocer las soluciones de (21) simplemente realizamos:

$$x_1 = z_1 - \frac{a}{3} \quad (54.1)$$

$$x_2 = z_2 - \frac{a}{3} \quad (54.2)$$

$$x_3 = z_3 - \frac{a}{3} \quad (54.3)$$

De esta manera hemos deducido las Fórmulas de Cardano a través del Polinomio de Taylor.

IV. CONCLUSIONES

Al llegar a estas relaciones a través de un desarrollo como el anterior, nos podemos percatar que el discriminante Δ tiene un papel protagónico en las soluciones. Podemos así definir que:

$\Delta = 0$ Todas las soluciones son reales y al menos dos son iguales.

$\Delta > 0$ Una solución es real y dos son complejas.

$\Delta < 0$ Todas las soluciones son reales distintas.

Estas relaciones son de gran ayuda para tener una idea de que esperar en las soluciones de ecuaciones cúbicas a través de las Fórmulas de Cardano.

Las ecuaciones cúbicas se pueden resolver aplicando diversos algoritmos por ejemplo la Regla de Ruffini para factorizar, el método del punto fijo, el Método Newton-Raphson, entre otros procesos iterativos. Conocer el método de las Fórmulas de Cardano es un elemento más a nuestro arsenal para atacar los diversos problemas matemáticos que nos vayamos topando en la vida. Ningún método es mejor que otro, simplemente son diversas alternativas a nuestro alcance y con la experiencia se aprenderá cual ocupar o no a nuestra conveniencia en cada situación.

REFERENCIAS

- [1] Swokowski, Earl W. (1988) Calculus With Analytic Geometry. PWS Publishers. U.S.A.
- [2] Granville, William Anthony (2014). Cálculo diferencial e integral. LIMUSA México, D.F.
- [3] Stewart, James (2010). Single Variable Calculus: Concepts and Contexts. Cengage Learning. U.S.A.
- [4] Uspensky, J.V. (1997). Teoría de ecuaciones. LIMUSA México, D.F.

Journal de *Objetos y* *Objetivos* *Matemáticos*